Mathematatik für Informatiker III

Universität des Saarlandes Prof. Dr. Matthias Hein Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 3

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0)^\top, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

i) Zeigen Sie: f ist in $(0,0)^\top$ total differenzierbar. (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie: f ist in $(0,0)^\top$ nicht stetig partiell differenzierbar. (4 Punkte)

Hinweise: i) Berechnen Sie das Differential (Gradient) im Ursprung und überprüfen Sie durch Einsetzen, ob die Definition für totale Differenzierbarkeit erfüllt ist. ii) Betrachten Sie $\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$.

Lösung: i) Für eine Konstante $c \geq 1$ ist

$$\lim_{u\to 0} u \sin\left(\frac{1}{u^c}\right) = 0. \tag{1}$$

Es folgt, dass beide partiellen Ableitungen existieren, denn mit $\mathbf{0} = (0,0)^\top$, $e_1 = (1,0)^\top$ und $e_2 = (0,1)^\top$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{0}+he_i) - f(\mathbf{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0,\ i = 1,2,$$

so dass $\nabla f(\mathbf{0}) = (0,0)^\top$. Die Funktion f ist total differenzierbar in $\mathbf{0}$ nach Definition genau dann, wenn für alle Vektoren $v = (v_x, v_y)^\top$

$$\lim_{v\to\mathbf{0}} \frac{f(v_x,v_y) - f(\mathbf{0}) - \langle \nabla f(\mathbf{0}), v\rangle}{\|v\|} = 0.$$

Nun ist

$$\lim_{v\to\mathbf{0}} \frac{f(v_x,v_y) - f(\mathbf{0}) - \langle \nabla f(\mathbf{0}), v\rangle}{\|v\|} = \lim_{v\to\mathbf{0}} \frac{(v_x^2+v_y^2)\sin\left(\frac{1}{v_x^2+v_y^2}\right) - 0}{\|v\|} = 0$$

wg. (1).
ii) Jedoch ist f nicht stetig partiell differenzierbar: für $(x,y) \neq (0,0)^\top$ ist die partielle Ableitung bzgl. x gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 2\frac{\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)x}{x^2+y^2}$$

Betrachte nun

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{x\to 0} \left(2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Dieser Grenzwert existiert nicht.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0)^\top, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

i) Zeigen Sie: f ist in $(0,0)^\top$ stetig. (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie: f ist in $(0,0)^\top$ nicht total differenzierbar. (4 Punkte)

Hinweise: i) Benutzen Sie das Folgenkriterium. ii) Gehen Sie wie in Aufgabe 1, i) vor.

Lösung: i) Im folgenden benutzen wir die Landau-Symbole $o(\cdot), O(\cdot)$ bzgl. $(x,y) \to (0,0)$. So schreiben wir z.B.

$$y = o(x) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x} = 0, \quad y = O(x) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y}{x}\right| = C,$$

wobei $C \geq 0$ eine Konstante ist. Wir zeigen die Stetigkeit von f im Ursprung durch Betrachten der folgenden zwei Fälle:

$$1)\ y = O(x), \qquad 2)\ x = o(y).$$

Für Fall 1) ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4} \leq \frac{O(x^4)}{O(x^2)} = O(x^2) = o(1).$$

Für Fall 2) ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4} = \frac{O(xy^3)}{O(y^4)} = \frac{O(x)}{O(y)} = o(1).$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Nach dem Folgenkriterium ist also f im Ursprung stetig.
ii) Jedoch ist f im Ursprung nicht total differenzierbar. Da $xy^3 = 0$, falls $x = 0$ oder $y = 0$, folgt durch Betrachten der Grenzwerte

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$

dass $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Sei $v = (v_x, v_y)^\top$. Wir überprüfen nun gemäss der Definition totaler Differenzierbarkeit, ob

$$\lim_{v\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{0}+v) - f(\mathbf{0}) - \langle \nabla f(\mathbf{0}), v\rangle}{\|v\|} = 0.$$

Wähle $v_x = h^2, v_y = h$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\lim_{v\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{0}+v) - f(\mathbf{0}) - \langle \nabla f(\mathbf{0}), v\rangle}{\|v\|} \\
&= \lim_{v\to\mathbf{0}} \frac{f(v)}{\|v\|} \\
&= \lim_{(v_x,v_y)\to(0,0)} \frac{\frac{v_x v_y^3}{v_x^2+v_y^4}}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{2h^4}}{\sqrt{h^2+h^4}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{2h^5} = \frac{1}{2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) := (4y, 3x^2 - 2\sin(yz), 2yz) \end{array}$$

und bestimmen Sie der Menge der Punkte, an denen die Jacobi-Matrix nicht invertierbar ist.
Hinweis: Argumentieren Sie mittels der Determinante der Matrix.

Lösung: Wir berechnen die Jacobi-Matrix von f an der Stelle (x,y,z) als

$$D_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 6x & -2z\cos(yz) & -2y\cos(yz) \\ 0 & 2z & 2y \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $D_f(x,y,z)$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht verschwindet. Zur Berechnung der Determinante ist es günstig, eine Laplace-Entwicklung nach der ersten Zeile durchzuführen. Es folgt, dass

$$\det(D_f(x,y,z)) = -48xy,$$

d.h. $D_f(x,y,z)$ ist nicht invertierbar für die Punkte

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0 \text{ oder } y = 0\}.$$

Aufgabe 4

i) Zeigen Sie: Sind $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to U$ total differenzierbar, so gilt für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $x \in V$:

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x), \quad y_j := g_j(x).$$

(2 Punkte)

ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $g(x) = f(a^\top x + b)$, wobei $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. (2 Punkte).

Lösung: i) Wir wenden die Kettenregel aus der Vorlesung an. Das Differential der Abbildung $f \circ g$ ist gegeben durch

$$D_{f\circ g}(x) = D_f(g(x)) \cdot D_g(x),$$

wobei '$\cdot$' Matrizenmultiplikation meint. Das Differential $D_g(x)$ wird repräsentiert durch die $k \times n$-Matrix mit Einträgen

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x), \ 1 \le j \le k, \ \ 1 \le i \le n.$$

Das Differential $D_f(g(x))$ wird repräsentiert durch den $1 \times k$-Zeilenvektor mit Einträgen

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)), \ 1 \le j \le k, \ y_j = g_j(x).$$

Durchführen der Matrizenmultiplikation liefert für den i-ten Eintrag des $1 \times n$ Zeilenvektors, der $D_{f\circ g}(x)$ repräsentiert, das Resultat.
ii) Wir wenden die allgemeine Regel aus i) für die Abbildung $x \mapsto g(x) := a^\top x + b$ an. Da

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, erhalten wir einen Skalar $f'(a^\top x + b)$ für $D_f(g(x))$ und den Zeilenvektor $a^\top$ für $D_g(x)$. Zusammen erhalten wir

$$\frac{\partial f(a^\top x + b)}{\partial x_i}(x) = a_i f'(a^\top x + b),\ i = 1, \ldots, n.$$