Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes Prof. Dr. Matthias Hein Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Präsenzübungsblatt 9

Übungstermine: 16.Januar 2012 - 20.Januar 2012

Aufgabe 1

Lösung: a) Das zugrundeliegende Urnenmodell ist hier Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge, da 1) eine Zeichenkette Zeichen mehrfach enthalten darf und 2) z.B. die Zeichenkette aab ungleich aba ist. Da es N Zeichen gibt und k mal gezogen wird, ist die gesuchte Anzahl N^k.
b) Das zugrundeliegende Urnenmodell ist hier Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge. Die gesuchte Anzahl Möglichkeiten ist

$$N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

c) Jede Äquivalenzklasse enthält Zeichenketten, bei denen die Häufigkeiten der einzelnen Zeichen übereinstimmen, die Reihenfolge der Elemente einer Äquivalenzklasse kann aber unterschiedlich sein. Durch den Übergang zu Äquivalenzklassen spielt aber die Reihenfolge keine Rolle mehr. Eine Zeichenkette kann jedoch Zeichen mehrfach enthalten. Das zugrundeliegende Urnenmodell ist also Ziehen mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge. Die gesuchte Anzahl Möglichkeiten ist also

$$\binom{N+k-1}{k}.$$

d) Im Unterschied zu c) ist das Urnenmodell nun Ziehen ohne Zurücklegen. Die gesuchte Anzahl Möglichkeiten ist daher

$$\binom{N}{k}.$$

Aufgabe 2

Lösung: a) Man hat nur noch die Möglichkeiten für die übrigen $k-l$ Zahlen zu bestimmen. Die verbleibenden $k-l$ Würfe dürfen nur die Zahlen $\{1, \ldots, 5\}$ enthalten. Das zugrundeliegende Urnenmodell ist Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge. Also gibt es 5^{k-l} Möglichkeiten.
b) Im Unterscheid zu a) ist müssen die Sechsen nicht genau in den ersten l Würfen auftreten, sondern nur in genau l aus k Würfen. Die Anzahl Möglichkeiten aus a) muss also mit der Anzahl Möglichkeiten multipliziert werden, aus einer k-elementigen Menge l Elemente auszuwählen. Wir erhalten $5^{k-l} \cdot \binom{k}{l}$.
c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$\frac{5^{3-2} \cdot \binom{3}{2}}{6^3} = \frac{5 \cdot 3}{6^3} = \frac{15}{216}.$$

Aufgabe 3

Lösung: Es ist

$$G(s) = \mathbf{E}[s^X] = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda(s-1)).$$

Wir berechnen

$$G'(s) = \lambda \exp(\lambda(s-1)), \qquad G''(s) = \lambda^2 \exp(\lambda(s-1)).$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[X] = G'(1) = \lambda, \\
&\mathbf{E}[X(X-1)] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X] = G''(1) = \lambda^2 \\
&\Rightarrow \mathbf{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda \\
&\Rightarrow V(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \lambda.
\end{aligned}$$