Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 8

Aufgabe 1

Lösung: a) Es ist

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right)\ dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1-\rho^2)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y^2 - 2\rho xy)\right)\ dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2(1-\rho^2)}{2(1-\rho^2)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y^2 - 2\rho xy + \rho^2 x^2)\right)\ dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2\right)\ dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass das letzte Integral über die Dichte einer Gaussverteilung mit Parametern ρx und $(1-\rho^2)$ gleich 1 ist. Die Randverteilung von X ist eine (Standard-)Gauss-Verteilung. Dies gilt aus Symmetriegründen auch für die Randverteilung von Y.
b) Es ist

$$\begin{aligned}
f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} &= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + \rho^2 y^2)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho y)^2\right).
\end{aligned}$$

Die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y$ ist also eine Gaussverteilung mit Parametern ρy und $(1-\rho^2)$. Ein analoges Resultat gilt für die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$.
c) Aus a) folgt, dass $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$ und $V(X) = V(Y) = 1$, so dass $\mathrm{Corr}(X,Y) = \mathbf{E}[XY]$. Dies führt zum Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy &= \int_{\mathbb{R}^2} xy \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right)\ dx\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \int_{\mathbb{R}} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2\right)\ dy\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \rho x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\ dx = \rho.
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt sind wir wie in Teil a) vorgegangen. Im zweiten Schritt identifizieren wir das innere Integral als $\mathbf{E}[Y|X = x] = \rho x$. Im letzen Schritt identifizieren das innere Integral als $V(X) = \mathbf{E}[X^2] = 1$.

d) Die Implikation $X, Y \Rightarrow \mathrm{Corr}(X, Y) = 0$ gilt immer. Es bleibt zu zeigen, dass die Umkehrrichtung auch gilt. Ist $\rho = 0$, so bekommen wir

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right) = f_X(x) f_Y(y).$$

Aufgabe 2

Lösung: Die Umkehrtransformation der Transformation $x \mapsto y(x) := -\log(x)$ ist gegeben durch $x(y) = \exp(-y)$, so dass

$$\left|\frac{dx}{dy}(y)\right| = \exp(-y).$$

Nach der Transformationsregel ist demnach $f_Y(y) = \exp(-y)$, $y > 0$.