Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes Prof. Dr. Matthias Hein Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Präsenzübungsblatt 7

Übungstermine: 12.Dezember 2011 - 16.Dezember 2011

Aufgabe 1

Seien X, Y Zufallsvariablen mit $0 < V[X], V[Y] < \infty$. Betrachten Sie die Korrelation von X, Y, definiert durch

$$\text{Corr}(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

Zeigen Sie, dass $|\text{Corr}(X,Y)| \leq 1$ mit Gleichheit, wenn $Y = \alpha X + \beta$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie zunächst die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$\mathbf{E}[XY]^2 \leq \mathbf{E}[X^2]\,\mathbf{E}[Y^2],$$

Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

1. Berechnen Sie $\mathbf{E}[\widetilde{X}^2]$ und $\mathbf{E}[\widetilde{Y}^2]$, wobei $\widetilde{X} = \frac{X}{\sqrt{\mathbf{E}[X^2]}}$ und $\widetilde{Y} = \frac{Y}{\sqrt{\mathbf{E}[Y^2]}}$.
2. Berechnen Sie $\mathbf{E}[(\widetilde{X} + \widetilde{Y})^2]$, $\mathbf{E}[(\widetilde{X} - \widetilde{Y})^2]$, um eine obere und untere Schranke für $\mathbf{E}[\widetilde{X}\widetilde{Y}]$ zu erhalten.
3. Setzen Sie $\mathbf{E}[\widetilde{X}\widetilde{Y}]$ und $\mathbf{E}[XY]$ miteinander in Beziehung, um eine obere und untere Schranke für $\mathbf{E}[XY]$ zu erhalten.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Zufallsvariablen X, Y, deren gemeinsame Dichte durch

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,(1 - x^2y^2) & -1 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben ist.

a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $f_{X,Y}$ eine gültige Dichte ist.

b) Berechnen Sie die Korrelation von X und Y.

c) Sind X und Y unabhängig ?

Aufgabe 3

Seien $s > r \geq 1$ und X eine Zufallsvariable mit $\mathbf{E}[|X|^s] < \infty$.
Zeigen Sie: $\mathbf{E}[|X|^r]^{1/r} \leq \mathbf{E}[|X|^s]^{1/s}$.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $|X|^s = |X|^{r \cdot \frac{s}{r}}$ und verwenden Sie die Ungleichung von Jensen.