
Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 7

Aufgabe 1

Lösung: Wir zeigen zunächst die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Es ist $\mathbf{E}[\widetilde{X}^2] = \mathbf{E}[\widetilde{Y}^2] = 1$. Weiter ist

$$\mathbf{E}[(\widetilde{X} + \widetilde{Y})^2] = \mathbf{E}[\widetilde{X}^2] + 2\,\mathbf{E}[\widetilde{X}\widetilde{Y}] + \mathbf{E}[\widetilde{Y}^2]$$
$$\mathbf{E}[(\widetilde{X} - \widetilde{Y})^2] = \mathbf{E}[\widetilde{X}^2] - 2\,\mathbf{E}[\widetilde{X}\widetilde{Y}] + \mathbf{E}[\widetilde{Y}^2]$$

Da $\mathbf{E}[(\widetilde{X} + \widetilde{Y})^2], \mathbf{E}[(\widetilde{X} - \widetilde{Y})^2] \geq 0$ und $\mathbf{E}[\widetilde{X}^2] = \mathbf{E}[\widetilde{Y}^2] = 1$ folgt, dass

$$-1 \leq \mathbf{E}[\widetilde{X}\widetilde{Y}] \leq 1 \quad \Rightarrow -\sqrt{\mathbf{E}[X^2]}\sqrt{\mathbf{E}[Y^2]} \leq \mathbf{E}[XY] \leq \sqrt{\mathbf{E}[X^2]}\sqrt{\mathbf{E}[Y^2]}$$

und somit unmittelbar die Behauptung. Wendet man die Cauchy-Schwarz Ungleichung auf die zentrierten Zufallsvariablen $X - \mathbf{E}[X]$ und $Y - \mathbf{E}[Y]$ an, folgt direkt, dass $|\mathrm{Corr}(X,Y)| \leq 1$.

Für den zweiten Teil ($Y = \alpha X + \beta$) können wir O.B.d.A annehmen, dass $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$ (und somit auch $\beta = 0$). Dann ist

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathbf{E}[XY]}{\sqrt{\mathbf{E}[X^2]}\sqrt{\mathbf{E}[Y^2]}} = \frac{\alpha\,\mathbf{E}[X^2]}{\sqrt{\mathbf{E}[X^2]}\sqrt{\alpha^2\,\mathbf{E}[X^2]}} = \frac{\alpha\,\mathbf{E}[X^2]}{|\alpha|\,\mathbf{E}[X^2]} \in \{-1, 1\}.$$

Aufgabe 2

a) Es muss gelten, dass $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ (und daher: $c > 0$). Weiter muss gelten, dass

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)\;dx\;dy = 1.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)\;dx\;dy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} c(1 - x^2y^2)\;dx\;dy \\ &= c\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\;dx\;dy - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2y^2\;dx\;dy\right) \\ &= c\left(4 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = c\frac{32}{9},\end{aligned}$$

d.h. man muss $c = \frac{9}{32}$ setzen.
b) Wir berechnen die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]$.

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x f_{X,Y}(x,y)\;dx\;dy = c\int_{-1}^{1} x \int_{-1}^{1} (1 - x^2y^2)\;dy\;dx = c\int_{-1}^{1} x\left(2 - \frac{2}{3}x^2\right)\;dx = 0 = \mathbf{E}[Y].$$

$$\mathbf{E}[XY] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy f_{X,Y}(x,y)\;dx\;dy = c\int_{-1}^{1} x \int_{-1}^{1} y(1 - x^2y^2)\;dydx = c\int_{-1}^{1} x\left(\frac{1}{2}y^2 - x^2\frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-1}^{1}\;dx = 0.$$

Es folgt, dass $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ und somit auch $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$.
c) X und Y sind nicht unabhängig, da sich die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}$ nicht als Produkt zweier Dichten schreiben lässt, die nur von x bzw. nur von y abhängen.

Aufgabe 3

Lösung: Die Funktion $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \varphi(x) = x^p$, $p \geq 1$ ist konvex, da

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^p \leq \lambda x^p + (1-\lambda)y^p \quad \text{(Dreiecksungleichung).}$$

Somit ist:

$$\mathbf{E}[|X|^s] = \mathbf{E}\left[|X|^{\frac{s}{r}\cdot r}\right] = \mathbf{E}\left[Y^{\frac{s}{r}}\right], \quad Y = |X|^r,$$

und weiter mit der Ungleichung von Jensen sowie $p := s/r > 1$

$$\mathbf{E}[Y^{\frac{s}{r}}] = \mathbf{E}[\varphi(Y)] \geq \varphi(\mathbf{E}[Y]) = \mathbf{E}[|X|^r]^{\frac{s}{r}},$$

d.h.

$$\mathbf{E}[|X|^s] \geq \mathbf{E}[|X|^r]^{\frac{s}{r}},$$

wendet man die Funktion $x \mapsto x^{1/s}$ auf beide Seiten der Gleichung an, so folgt die Behauptung.