

## Präsenzübungsblatt 6

Übungstermine: 5.Dezember 2011 - 9.Dezember 2011

### Aufgabe 1

Gegeben sei die Menge

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x \leq 1, z \geq 0\}.$$

Berechnen Sie

$$\text{vol}(K) = \int_K dx dy dz.$$

Probieren Sie dazu die Integrationsreihenfolgen 'dx dy dz' und 'dy dz dx' aus. Welche Wahl ist geschickter ?

### Aufgabe 2

Betrachten Sie den Torus  $T \subset \mathbb{R}^3$  mit Parametern  $R \geq r > 0$ :

$$T = \{([R + \rho \cos(\varphi)] \cos(\theta), [R + \rho \cos(\varphi)] \sin(\theta), \rho \sin(\varphi)), \theta, \varphi \in [0, 2\pi], \rho \in [0, r]\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $T$  sich als Kartesisches Produkt  $S_R \times D_r$  beschreiben lässt, wobei

$$S_R = \{(R \cos(\theta), R \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi]\}, \quad D_r = \{(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi)), \varphi \in [0, 2\pi], \rho \in [0, r]\}.$$

- b) Benutzen Sie a), um das Volumen von  $T$  zu berechnen.
- c) Sei  $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $\eta(y) \geq 0$ ,  $y \in [a, b]$ . Man betrachte den Rotationskörper

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq \eta^2(y), y \in [a, b]\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\text{vol}(\mathcal{R}) = \pi \int_a^b \eta^2(y) dy.$$

Verwenden Sie dieses Resultat, um das Volumen von  $T$  zu berechnen.