
Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 6

Aufgabe 1

Lösung: a) Berechnung gemäss der Reihenfolge '$dx\ dy\ dz$' liefert unter Verwendung des Satzes von Fubini, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(K) &= \int_K dx\ dy\ dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{y^2+z^2}^1 dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} (1 - y^2 - z^2)\ dy \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\left(y - \frac{1}{3} y^3 - yz^2 \right) \Big|_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \right) dz \\
&= 2 \left(\int_0^1 \left((1-z^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(1-z^2)^{3/2} \right) dz \right) \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Es ist unklar, wie es an dieser Stelle weitergehen soll. Die Reihenfolge '$dy\ dz\ dx$' liefert hingegen auf einfache Weise das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(K) &= \int_K dy\ dz\ dx = \int_0^1 \left(\int_{S_x} dy\ dz \right) dx,\ S_x := \{(y,z) :\ y^2 + z^2 \leq x,\ z \geq 0\} \\
&= \int_0^1 \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{x}\right)^2\ dx = \frac{\pi}{4} x^2 \big|_0^1 = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass die Menge S_x des inneren Integrals einen Halbkreis mit Radius $\sqrt{x}$ darstellt.

Aufgabe 2

Lösung: a) Jeder Punkt $\xi = (x, y, z) \in T$ lässt sich durch einen Punkt ξ_1 auf einem Kreis mit Radius R in der (x, y)-Ebene (Menge S_R) und einen weiteren Punkt ξ_2 auf einer Kreisscheibe mit Radius r in der (x, z)-Ebene beschreiben (Menge D_r). Genauer betrachten wir

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ 0 \\ \rho\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

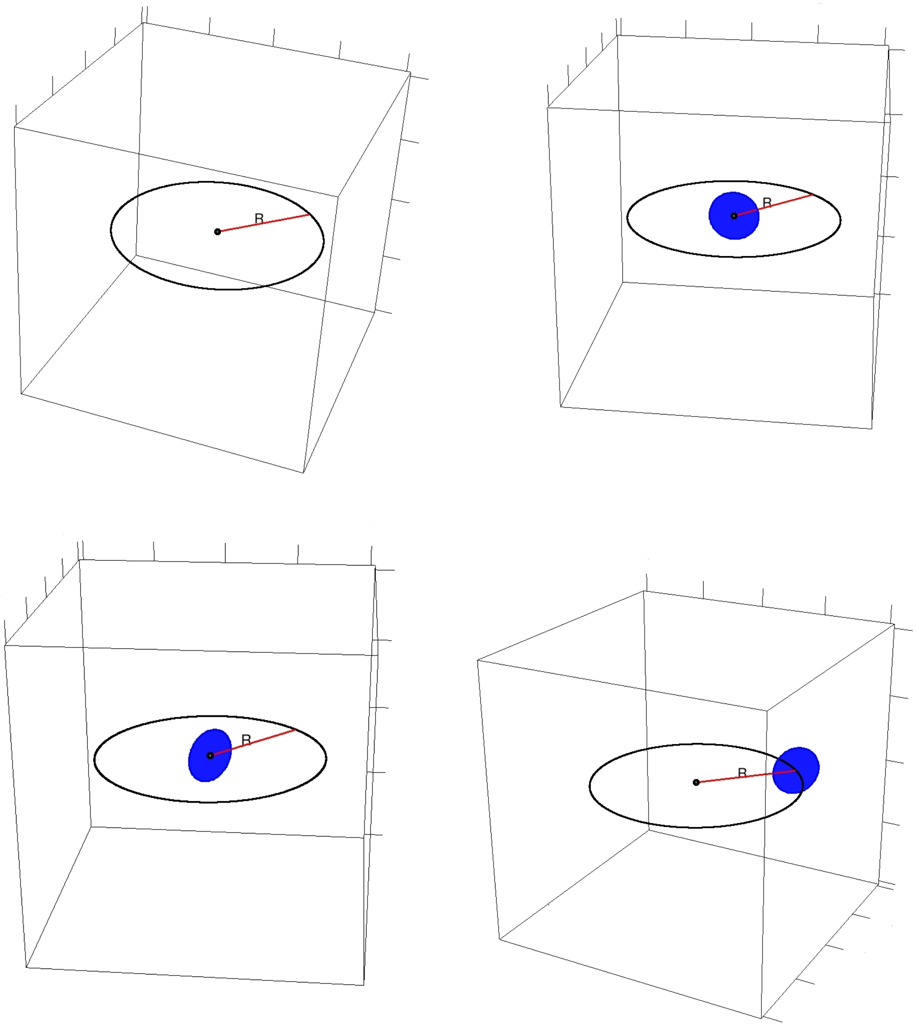
Wir erhalten ξ von ξ_1 und ξ_2, indem wir zunächst ξ_2 um den Winkel θ in der (x, y)-Ebene drehen und den Punkt anschliessend um ξ_1 translatieren. Die Drehmatrix in der (x, y)-Ebene ist gegeben durch

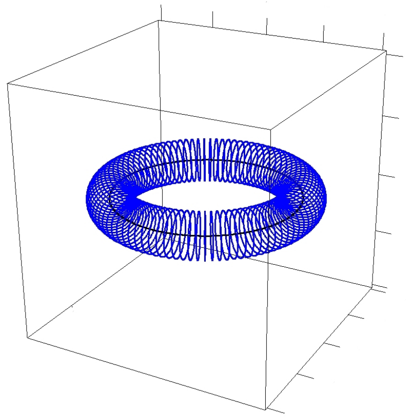
$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

was leicht aus geometrischen Argumenten folgt: der erste kanonische Basisvektor $(1,0,0)^\top$ wird zum Punkt $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)^\top$ gedreht ($\to$ Polarkoordinaten), und der zweite kanonische Basisvektor $(0,1,0)^\top$ wird auf den Punkt $(-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)^\top$ gedreht, welcher der Vektor in der (x,y)-Ebene ist, der orthogonal zu $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)^\top$ ist und Länge 1 hat. Der dritte kanonische Basisvektor bleibt unverändert.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_1 + Q\xi_2 \\
&= \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (R+\rho\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (R+\rho\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ \rho\sin(\varphi) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der letzte Auspunkt entspricht genau der angegebenen Parametrisierung. Die folgende Abbildung illustriert die obigen Überlegungen, zu lesen von oben nach unten und von links nach rechts. Die erste Abbildung zeigt S_R in der (x,y)-Ebene, die zweite zusätzlich die Kreisscheibe D_r. In der dritten Abbildung erfolgt die beschriebene Drehung, und in der vierten die Translation. Die fünfte Abbildung zeigt schematisch die Menge T.





b) Obiges Konstruktionschema suggeriert, das Volumen von T als

$$\text{Länge von } S_R \ \times \ \text{Fläche von } D_r = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$$

zu berechnen. Dies ist tatsächlich richtig und lässt sich mit dem Satz von Fubini begründen (hier nur informell). Es ist

$$\int_T dx\ dy\ dz = \int_{S_R \times D_r} dx\ dy\ dz = \left(\int_{S_R} d\sigma \right) \left(\int_{D_r} d\xi d\zeta \right),$$

wobei wir nun D_r auffassen als $D_r = \{(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2 : \ \xi^2 + \zeta^2 \leq r^2\}$ und '$\int_{S_R} d\sigma$' hier das eindimensionale Volumen ('Länge') von $S_R \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnet. Man beachte, dass das zweidimensionale Volumen von S_R null ist.

c) Es ist

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{R}) &= \int_a^b \left(\int_{\{(x,z):\ x^2+z^2 \leq \eta^2(y)\}} dx\ dz \right) dy \\ &= \int_a^b \left(\int_0^{\eta(y)} \rho \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho \right) dy \\ &= 2\pi \int_a^b \int_0^{\eta(y)} \rho\ d\rho\ dy \\ &= 2\pi \int_a^b \frac{1}{2} \eta^2(y)\ dy \\ &= \pi \int_a^b \eta^2(y)\ dy, \quad (\#) \end{aligned}$$

wobei wir eine Polarkoordinatentransformation durchgeführt haben. Man überlegt sich leicht aufgrund den Teilen a) und b), dass

$$\text{vol}(T) = \text{vol}(\mathcal{R}) \ \text{ mit } \mathcal{R} = \{x^2 + z^2 \leq \eta^2(y)\}, \quad \eta : \ [0, 2\pi R] \to \mathbb{R}, \ y \mapsto \eta(y) = r,$$

d.h. $\eta(y)$ ist hier eine konstante Funktion. Einsetzen in $(\#)$ bestätigt das in b) gefundene Resultat.