Mathematik für Informatiker III

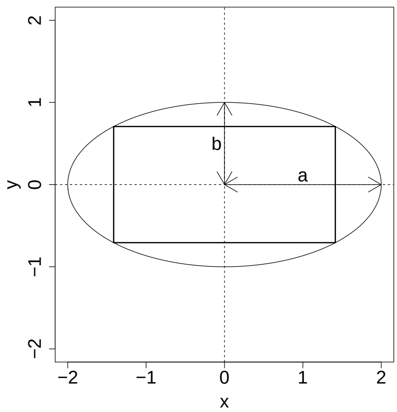
Universität des Saarlandes | Prof. Dr. Matthias Hein | Übungen: Martin Slawski

Wintersemester 2011/12

Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 5

Aufgabe 1

Lösung: a) Die gegebene Menge E spezifiert einen achsenparallelen Ellipsoiden, dessen Hauptachsen die Längen $2a$ bzw. $2b$ betragen. Die folgende Abbildung repräsentiert das Problem für $a = 2$ und $b = 1$.



Die durch fette Linie dargestellte Fläche repräsentiert den Quader (Rechteck) maximaler Fläche, der in der Menge E enthalten ist. Es ist offensichtlich, dass dieses Rechteck den Rand von E berühren muss (andernfalls wäre es möglich, das Rechteck weiter auszudehnen, um ein Rechteck grösserer Fläche zu enthalten).

b) Der gesuchte Quader ist gegeben durch eine Menge von der Form

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -c \leq x \leq c, \; -d \leq y \leq d\}$$

für positive Konstanten c und d. Das gesuchte Optimierungsproblem lässt sich somit schreiben als

$$\max_{c,d} f(c, d), \quad f(c, d) := c \cdot d \quad \text{unter der Nebenbedingung } \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleicheit in der Nebenbedingung folgt daraus, dass der Quader maximaler Fläche die Menge E an dessen Rand berührt. Die zusätzliche Nebenbedingung $c, d > 0$ können wir hier vorerst ignorieren.

c), i) Es ist klar, dass die Werte c^*, d^*, die die obige Funktion f maximieren, gleiches Vorzeichen haben müssen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also annehmen, dass $c^*, d^* > 0$. Unter dieser Bedingung lässt sich die Gleichung

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} = 1$$

nach der Variablen c in Abhängigkeit von d auflösen:

$$c = a\sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}}. \tag{1}$$

Einsetzen liefert dann das folgende Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung in einer Variablen.

$$\max_d \phi(d), \quad \phi(d) = a\sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}} \cdot d.$$

Es ist rechentechnisch günstiger, das Quadrat dieser Funktion zu betrachten. Man beachte, dass Quadrieren hier zu einem Maximierungsproblem führt ist, welches äquivalent ist, in dem Sinn, dass die Maximierer übereinstimmen. Wir betrachten also

$$\max_d \psi(d), \quad \psi(d) = a^2\left(d^2 - \frac{d^4}{b^2}\right).$$

Der Minimierer d^* genügt der Stationaritätsbedingung

$$\psi'(d^*) = 0 \iff 2d^* - 4\frac{(d^*)^3}{b^2} = 0 \Leftrightarrow d^* = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Es ist ferner $\psi''(d) = 2 - 12\frac{d^2}{b^2}$ und somit $\psi''(d^*) < 0$, d.h. wir haben tatsächlich ein Maximum gefunden. Zurückeinsetzen in (1) liefert schliesslich $c^* = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
ii) Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L(c, d, \lambda) = c \cdot d + \lambda\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} - 1\right).$$

Wenn man die partiellen Ableitungen bzgl. der drei Variablen c, d und λ berechnet und diese null setzt, erhält man die Bedingungen

$$\begin{aligned} d^* + \frac{2\lambda^*}{a^2}c^* &= 0, \\ c^* + \frac{2\lambda^*}{b^2}d^* &= 0 \\ \frac{(c^*)^2}{a^2} + \frac{(d^*)^2}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Wir lösen sukzessiv wie folgt auf.

$$\begin{aligned} d^* + \frac{2\lambda^*}{a^2}c^* = 0 \ \Rightarrow\ 2\lambda^* &= -\frac{d^* a^2}{c^*}, \\ \Rightarrow\ c^* - \frac{(d^*)^2}{c^*}\frac{a^2}{b^2} &= 0, \end{aligned}$$

Da aus der dritten der erste drei Bedingungen oben folgt, dass $\frac{(d^*)^2}{b^2} = 1 - \frac{(c^*)^2}{a^2}$, liefert eine Kombination mit der letzten Bedingung, dass

$$c^* - \frac{1}{c^*}\left(1 - \frac{(c^*)^2}{a^2}\right)a^2 = 0 \ \Rightarrow\ c^* = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Dies ist das gleiche Resultat wie unter i).