Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes Prof. Dr. Matthias Hein Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 4

Aufgabe 1

Lösung: 1. Den Gradient von f berechnet man als

$$\nabla f(x,y) = (2\sin(x)\cos(x)\cos(y) \quad -\sin^2(x)\sin(y))^\top.$$

Die Einträge des Gradienten sind null für die Menge

$$\{(x,y): \; x \in \{0,\pi,2\pi\}, y \in [0,2\pi]\}.$$

Darüber hinaus sind die Einträge des Gradienten null für die Punkte

1. $(\frac{\pi}{2}, 0)$,
2. $(\frac{3\pi}{2}, 0)$,
3. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$,
4. $(\frac{3\pi}{2}, \pi)$,
5. $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$,
6. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

2. Mit Ausnahme der Elemente der Menge

$$M = \{(x,y): \; x = \pi, \; y \in (0,2\pi)\}$$

und der Punkte $(\pi/2, \pi)$ und $(\frac{3}{2}\pi, \pi)$, liegen alle stationäre Punkte am Rand des Definitionsbereichs und sind daher keine lokalen Optima. Berechnung der Hesse-Matrix liefert

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos(y)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) & -2\sin(x)\sin(y)\cos(x) \\ -2\sin(x)\sin(y)\cos(x) & -\sin^2(x)\cos(y) \end{pmatrix}.$$

Auswertung an den genannten Punkten liefert

$$Hf(\pi, y) = \begin{pmatrix} 2\cos(y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$Hf(\pi/2, \pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$Hf(\frac{3}{2}\pi, \pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Wir folgern, dass die Punkte $(\pi/2, \pi)$ und $(\frac{3}{2}\pi, \pi)$ lokale Minima sind, da die Hesse-Matrix an diesen Stellen positiv definit ist. An allen anderen Punkten sind die Hesse-Matrizen nur semidefinit.
3. Die Funktion f nimmt auf der kompakten Menge $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ ihr Minimum bzw. Maximum an. Es ist $-1 \leq \sin^2(x)\cos(y) \leq 1$, d.h. es genügt, Punkte zu finden, an denen die beiden Schranken angenommen werden. Das lokale Minimum $(\pi/2, \pi)$ ist tatsächlich auch ein globales Minimum, da $f(\pi/2, \pi) = -1$. Weiter ist $f(\pi/2, 0) = 1$, d.h. $(\pi/2, 0)$ ist ein

globales Maximum.
4. Berechnung des Gradienten am Startwert $(x_0, y_0)^\top$ liefert

$$d_x^0 = 0, \qquad d_y^0 = -1.$$

Zur Berechnung der Schrittweite α^0 betrachten wir nun das Minimierungsproblem

$$\min_{\alpha \geq 0} \sin^2(\pi/2)\cos(\pi/2 + \alpha).$$

Setzt man $\alpha = \pi/2$, wird dieser Ausdruck minimiert, da $\sin^2(\pi/2) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$. Wir haben daher nach einem Schritt ein globales Minimum der Funktion erreicht. Der Gradient an dieser Stelle ist null, so dass das Verfahren stoppt.