Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes   Prof. Dr. Matthias Hein   Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Präsenzübungsblatt 3

Übungstermine: 14.-18. November 2011

Aufgabe 1

Verwenden Sie im folgenden den Satz von Taylor für Funktionen einer Veränderlichen.
Satz von Taylor.
Sei f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *$(k+1)$-mal stetig differenzierbar ($f \in C^{k+1}$). Dann existiert ein $\theta \in [0,1]$, so dass für alle $x, \xi \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \frac{f^{(k+1)}(\theta x + (1-\theta)\xi)}{(k+1)!}(x-\xi)^{k+1}.$$

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

i. Zeigen Sie: $f \in C^1 \Rightarrow \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n \ \exists \theta \in [0,1]$, so dass

$$f(x) = f(\xi) + \langle \nabla f(\theta x + (1-\theta)\xi), x - \xi \rangle .$$

ii. Zeigen Sie: $f \in C^2 \Rightarrow \ \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n \ \exists \theta \in [0,1]$, so dass

$$f(x) = f(\xi) + \langle \nabla f(\xi), x - \xi \rangle + \frac{1}{2}(x-\xi)^\top Hf(\theta x + (1-\theta)\xi)(x-\xi).$$

iii. Sei $f \in C^2$. Zeigen Sie, dass das Taylorpolynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt ξ geschrieben werden kann als

$$f(\xi) + \langle \nabla f(\xi), x - \xi \rangle + \frac{1}{2}(x-\xi)^\top Hf(\xi)(x-\xi).$$

iv. Zeigen Sie: $f \in C^2, \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|Hf(z)\| \leq L$ für eine Konstante $L > 0$, wobei $\|\cdot\|$ hier die Operatornorm von H bezeichnet. Dann ist $\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \leq f(\xi) + \langle \nabla f(\xi), x - \xi \rangle + \frac{L}{2} \|x - \xi\|_2^2 .$$

v. Gegeben sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := (x+y)^2$. Berechnen Sie die Taylorpolynome von f der Ordnung 0 bis 2 und verfizieren i) und ii) für den Entwicklungspunkt $(0,0)^\top$. Was ist das Restglied für die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ?