Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes | Prof. Dr. Matthias Hein | Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 3

Aufgabe 1

Lösung: Sei $t \in [0,1]$, $h = x - \xi$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ fix und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Betrachte die Funktion

$$\phi(t) := f(\xi + th).$$

Die Funktion ϕ ist eine skalarwertige Funktion einer Veränderlichen und der angegebene Satz von Taylor kann angewandt werden. Im folgenden nehmen wir an, dass f genügend glatt ist, so dass die benötigten Ableitungen existieren. Anwendung der Kettenregel liefert

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \langle \nabla f(\xi + th), h\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi + th) h_i,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi + th) h_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi + th) h_j = \langle h, Hf(\xi + th) h\rangle\,.$$

Um die Resultate i) und ii) zu erhalten, führen wir Taylorentwicklungen nullter und erster Ordnung von ϕ um den Entwicklungspunkt 0 durch. Wir erhalten gemäss dem angegebenen Satz

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(\theta) \tag{1}$$

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(\theta), \tag{2}$$

für ein $\theta \in [0,1]$. Auswerten der entsprechenden Ausdrücke und Subsitution von h durch $x - \xi$ liefert schliesslich

$$f(x) = f(\xi) + \langle \nabla f(\xi + \theta(x - \xi)), x - \xi\rangle$$

$$f(x) = f(\xi) + \langle \nabla f(\xi), x - \xi\rangle + \frac{1}{2}(x - \xi)^\top Hf(\xi + \theta(x - \xi))(x - \xi),$$

was zu zeigen war. iii) ist analog: das Taylorpolynom zweitert Ordnung von ϕ um den Entwicklungspunkt 0 ist gegeben durch

$$\phi(0) + \phi'(0)t + \frac{\phi''(0)}{2}t^2.$$

Auswerten an $t = 1$ und Substitution wie oben liefert dann den angegebenen Ausdruck.
iv) folgt unmittelbar aus ii) durch Abschätzung des quadratischen Terms mittels üblicher Ungleichungen für Normen. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x - \xi)^\top Hf(\xi + \theta(x - \xi))(x - \xi) &\leq \frac{1}{2}\|x - \xi\|\,\|Hf(\xi + \theta(x - \xi))(x - \xi)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - \xi\| \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|Hf(z)\|\,\|x - \xi\| \\ &\leq \frac{L}{2}\|x - \xi\|^2\,.\end{aligned}$$

v) Den Gradient und die Hesse-Matrix der angegebenen Funktion berechnet man als

$$\nabla f(x, y) = 2\begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix},$$

$$Hf(x, y) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne den Entwicklungspunktspunkt der Taylorpolynome mit (x_0, y_0). Wir erhalten

$$T_0(x,y) = (x_0+y_0)^2$$
$$T_1(x,y) = (x_0+y_0)^2 + 2\left\langle \begin{pmatrix} x_0+y_0 \\ x_0+y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$T_2(x,y) = (x_0+y_0)^2 + 2\left\langle \begin{pmatrix} x_0+y_0 \\ x_0+y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle + (x-x_0 \;\; y-y_0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}.$$

Wir verifizieren nun i) für dieses Beispiel:

$$(x+y)^2 \stackrel{!}{=} 0 + 2\theta \left\langle \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Gleichung für $\theta = \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Genauso lässt sich ii) verifizieren:

$$(x+y)^2 \stackrel{!}{=} 0 + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + (x \;\; y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ausmultiplizieren der quadratischen Form zeigt, dass die Gleichung erfüllt ist.
Da die gegebene Funktion quadratisch ist, verschwindet das Restglied bei einer Taylorentwicklung zweiter Ordnung.