Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes   Prof. Dr. Matthias Hein   Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Präsenzübungsblatt 2

Übungstermine: 7.-11. November 2011

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar, $x, y, v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i) Es existiert eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, so dass

$$f(x+v) = f(x) + D_f(x)v + \Phi(v), \quad \lim_{v \to \mathbf{0}} \frac{\Phi(v)}{\|v\|} = \mathbf{0}.$$

ii) Es existiert eine Funktion $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(y) = f(x) + D_f(x)(y-x) + \Psi(y)\,\|y-x\|\,, \quad \lim_{y \to x} \Psi(y) = \mathbf{0},$$

wobei $D_f(x)$ das Differential von f im Punkt x bezeichnet.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass f in alle Richtungen differenzierbar ist, d.h. für alle $x, v \in \mathbb{R}^n$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche definiert ist durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)^\top \neq (0,0)^\top, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)^\top$ nicht total differenzierbar ist.