Mathematik für Informatiker III

Universität des Saarlandes Prof. Dr. Matthias Hein Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 2

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar, $x, y, v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i) Es existiert eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, so dass

$$f(x+v) = f(x) + D_f(x)v + \Phi(v), \quad \lim_{v \to \mathbf{0}} \frac{\Phi(v)}{\|v\|} = \mathbf{0}.$$

ii) Es existiert eine Funktion $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(y) = f(x) + D_f(x)(y-x) + \Psi(y)\,\|y-x\|\,, \quad \lim_{y \to x} \Psi(y) = \mathbf{0},$$

wobei $D_f(x)$ das Differential von f im Punkt x bezeichnet.

Lösung: i) $\Rightarrow$ ii)
Wir setzen $y = x + v$ für $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig und

$$\Psi(y) := \frac{\Phi(y-x)}{\|y-x\|},$$

so dass

$$\lim_{y \to x} \Psi(y) = \lim_{y \to x} \frac{\Phi(y-x)}{\|y-x\|} = \lim_{v \to \mathbf{0}} \frac{\Phi(v)}{\|v\|} = \mathbf{0}.$$

ii) $\Rightarrow$ i)
Wir setzen $v = y - x$ für $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig und

$$\Phi(v) := \Psi(x+v)\,\|v\|\,,$$

so dass

$$\lim_{v \to \mathbf{0}} \frac{\Phi(v)}{\|v\|} = \lim_{v \to \mathbf{0}} \Psi(x+v) = \lim_{y \to x} \Psi(y) = \mathbf{0}.$$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass f in alle Richtungen differenzierbar ist, d.h. für alle $x, v \in \mathbb{R}^n$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$

Lösung: Da f total differenzierbar ist, gilt für alle $u \in \mathbb{R}^n$

$$f(x+u) - f(x) = D_f(x)u + \Phi(u), \quad \lim_{u \to \mathbf{0}} \frac{\Phi(u)}{\|u\|} = 0.$$

Setze $u = h \cdot v$, wobei h ein Skalar ist und $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Betrachte nun den Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{D_f(x)(h\cdot v)}{h} + \frac{\Phi(h\cdot v)}{h} \right) \\
&= D_f(x)v + \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(h\cdot v)}{h} \\
&= D_f(x)v + \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(h\cdot v)}{\|h\cdot v\|} \|v\| \\
&= D_f(x)v = \langle \nabla f(x), v \rangle \,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche definiert ist durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)^\top \neq (0,0)^\top, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)^\top$ nicht total differenzierbar ist.

Lösung: Sei $v = (v_x, v_y)^\top \in \mathbb{R}^2$, $v_x^2 + v_y^2 = 1$. Gezeigt wird, dass der Limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((x+h\cdot v_x),(y+h\cdot v_y)) - f(x,y)}{h}$$

für $x = y = 0$ i.A. nicht existiert. Aus Aufgabe 2 folgt dann, dass f in $(0,0)^\top$ nicht total differenzierbar ist. Tatsächlich ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h\cdot v_x, h\cdot v_y) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 v_x v_y}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{v_x v_y}{h}.$$

Der Grenzwert existiert nur dann, wenn $v_x = 0$ oder $v_y = 0$.