Präsenzübungsblatt 11

Übungstermine: 30.Januar 2012 - 3.Februar 2012

Aufgabe 1

Seien $X_1, \ldots, X_5$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Wir betrachten folgende Schätzer $\widehat{h} = \widehat{h}(X_1, \ldots, X_5)$ für μ.

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_1 &= \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + \ldots + X_5) \\
\widehat{h}_2 &= \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \\
\widehat{h}_3 &= \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \frac{1}{2}X_5 \\
\widehat{h}_4 &= X_1 + X_2 \\
\widehat{h}_5 &= X_1.
\end{aligned}$$

a) Ein Schätzer $\widehat{h}$ für μ heisst *erwartungstreu* oder *unbiased* falls $\mathbf{E}[\widehat{h}] = \mu$. Untersuchen Sie $\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_5$ auf Erwartungstreue.

b) Sei $\text{Bias}(\widehat{h}) = \mathbf{E}[\widehat{h}] - \mu$. Zeigen Sie, dass für den mittleren quadratischen Fehler von $\widehat{h}$

$$\text{MSE}(\widehat{h}) = \mathbf{E}[(\widehat{h} - \mu)^2]$$

die sogenannte Bias-Varianz Zerlegung (*bias-variance decomposition*) gilt:

$$\text{MSE}(\widehat{h}) = \left\{\text{Bias}(\widehat{h})\right\}^2 + V(\widehat{h}).$$

c) Berechnen Sie $\text{MSE}(\widehat{h}_k)$, $k = 1, \ldots, 5$.

Aufgabe 2

Aufgrund jahrelanger wissenschaftlicher Untersuchungen geht eine Gruppe international anerkannter Psychologen davon aus, dass Informatikstudenten einen gegenüber der Normalbevölkerung deutlich erhöhten IQ aufweisen. Man nimmt an, dass der IQ von Informatikstudenten normalverteilt ist mit Varianz $\sigma^2 = 25$.

a) Oben genannte Psychologen möchten ein 95%-Konfidenzintervall für den mittleren IQ von Informatikstudenten bestimmen. Wie viele Personen müssen mindestens einen IQ-Test absolvieren, so dass die Länge des Intervalls nicht grösser als 2 ist ?

b) Es liegen die Ergebnisse von 18 IQ-Tests vor und man erhält 117 als mittleren IQ. Führen Sie einen zweiseitigen Test der Hypothese H_0 : 'IQ von Informatikstudenten ist gleich 100' zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch. Bestätigt das Ergebnis die Vermutung der Psychologen ?

Hinweis: Sei Z eine $N(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable. Benutzen Sie, dass $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \approx 0.95$.