**Mathematatik für Informatiker III**

Universität des Saarlandes Prof. Dr. Matthias Hein Übungen: Martin Slawski

Wintersemester 2011/12

---

# Präsenzübungsblatt 11

**Übungstermine:** 30.Januar 2012 - 3.Februar 2012

## Aufgabe 1

**Lösung:** a) Durch direkte Rechnung folgt aus der Linearität des Erwartungswerts, dass mit Ausnahme von $\widehat{h}_4$ alle anderen Schätzer erwartunstreu sind. Es ist $\mathbf{E}[\widehat{h}_4] = 2\mu \neq \mu$, d.h. dieser Schätzer ist nicht erwartungstreu.

b)

$$\begin{aligned}\text{MSE}(\widehat{h}) &= \mathbf{E}[(\widehat{h} - \mu)^2] \\ &= \mathbf{E}[(\widehat{h} - \mathbf{E}[\widehat{h}] + \mathbf{E}[\widehat{h}] - \mu)^2] \\ &= \mathbf{E}[(\widehat{h} - \mathbf{E}[\widehat{h}])^2] + (\mathbf{E}[\widehat{h}] - \mu)^2 + \\ &\underbrace{+2\,\mathbf{E}[(\widehat{h} - \mathbf{E}[\widehat{h}])(\mathbf{E}[\widehat{h}] - \mu)]}_{=0} \\ &= \mathbf{E}[(\widehat{h} - \mathbf{E}[\widehat{h}])^2] + (\mathbf{E}[\widehat{h}] - \mu)^2 \\ &= V(\widehat{h}) + \left\{\text{Bias}(\widehat{h})\right\}^2.\end{aligned}$$

c) Wir berechnen die MSEs gemäss der Bias-Varianz Zerlegung und benutzen die Resultate zur Erwartungstreue aus a). Demnach ist

$$\begin{aligned}\text{MSE}(\widehat{h}_1) &= V(\widehat{h}_1) = \frac{1}{5}\sigma^2, \\ \text{MSE}(\widehat{h}_2) &= V(\widehat{h}_2) = \frac{1}{3}\sigma^2, \\ \text{MSE}(\widehat{h}_3) &= V(\widehat{h}_3) = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)\sigma^2, \\ \text{MSE}(\widehat{h}_5) &= V(\widehat{h}_5) = \sigma^2.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\text{MSE}[\widehat{h}_4] = \left\{\text{Bias}(\widehat{h}_4)\right\}^2 + V(\widehat{h}_4) = \mu^2 + 2\sigma^2.$$

## Aufgabe 2

**Lösung:** a) Aufgrund der gemachten Annahmen bzgl. der Verteilung der interessierenden Größe konstruieren wir ein 95%-Konfidenzintervall von der Form

$$\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.975}, \;\; \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.975}\right],$$

wobei $z_{0.975}$ das 0.975-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung bzw. $\bar{X}$ das Stichprobenmittel bezeichnen. Die Länge $\ell$ des Intervalls ist gegeben durch

$$\ell = 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.975}$$

Damit $\ell = 2$ ist benötigen wir einen Stichprobenumfang der Grösse $n = \lceil \sigma^2 z_{0.975}^2 \rceil \approx \lceil 25 \cdot 1.96^2 \rceil = \lceil 96.04 \rceil = 97$.

b) Zur Überprüfung der von den Psychologen formulierten Hypothese führen wir einen zweiseitigen Gaußtest mit den Hypothesen

$$H_0: \quad \mu = \mu_0 = 100 \qquad H_1: \quad \mu \neq 100$$

durch. Dabei bezeichnet $\mu = \mathbf{E}[X]$ den Erwartungswert der Zufallsvariable $X$ : IQ eines Informatikstudenten. Die Teststatistik $T$ des Gauß-Tests hat die Form

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

wobei $\bar{X} = 117$ den Mittelwert der Stichprobe bezeichnet. Einsetzen der gegebenen Werte liefert

$$T = \frac{117 - 100}{5}\sqrt{18} = 14.42498.$$

Dieser Wert ist zu vergleichen mit dem $1 - \alpha/2 = 0.975$-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung, welches $\approx 1.96$ beträgt. Da $14.42498 > 1.96$, wird die Nullhypothese $H_0$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen. Die Hypothese, dass Informatiker einen mittleren IQ von 100 haben, wird also verworfen, und die Vermutung der Psychologen bestätigt.