Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes Prof. Dr. Matthias Hein Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Präsenzübungsblatt 10

Übungstermine: 23.Januar 2012 - 30.Januar 2012

Aufgabe 1

Eine unfaire Münze fällt mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ auf Kopf und Wahrscheinlichkeit $2/3$ auf Zahl. Die Münze wird $n = 30$ Mal geworfen, was durch unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen (0: Zahl, 1: Kopf) $X_1, \dots, X_{30}$ beschrieben wird. Sei $Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$. Es sei die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, mindestens 20 Mal 'Kopf' zu beobachten.

a) Mit der Ungleichung von Chebyshev:

$$P(Y - \mathbf{E}[Y] \geq t) \leq P(|Y - \mathbf{E}[Y]| \geq t) \leq \frac{V(Y)}{t^2}, \quad t \geq 0,$$

Ermitteln Sie dazu zunächst $\mathbf{E}[Y]$ und $V(Y)$. Wie muss dann t gewählt werden, um die gesuchte Abschätzung zu bekommen ?

b) Zeigen Sie, dass

$$P(Y \geq t) \leq \exp(-t)\,\mathbf{E}[\exp(Y)], \quad t \geq 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass für $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ monoton wachsend gilt, dass

$$P(h(Y) \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}[h(Y)]}{t}, \quad t \geq 0.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{E}[\exp(Y)] = \left(\frac{2+e}{3}\right)^n.$$

Hinweis: $\mathbf{E}[\exp(Y)] = \mathbf{E}[\exp(\sum_{i=1}^n X_i)] = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}[\exp(X_i)] = \mathbf{E}[\exp(X_1)]^n$.

d) Verwenden Sie die Resultate aus b) und c), um die gesuchte Wahrscheinlichkeit abzuschätzen.

Aufgabe 2

Man nehme an, die Antwortzeiten in Milisekunden eines Servers auf Anfragen von Clients lasse sich durch unabhängig, identisch verteilte exponentialverteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit Parameter $\lambda = 100$ beschreiben. Da die Anzahl Anfragen sehr groß ist, ist man an der Verteilung der Summe von $n = 10.000$ Anfragen interessiert.

a) Geben Sie die Parameter der Normalverteilung an, nach der $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ approximativ verteilt ist.
Hinweise: $\mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{\lambda}$, $V(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$. Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}[X_i])\right) \xrightarrow{D} N(0, V(X_1)).$$

b) Berechnen Sie $P(S_n > 105)$ unter der Normalverteilungsapproximation aus a).
Verwenden Sie, dass $\mathbf{P}(Z > 5) \approx 2.86 \cdot 10^{-7}$, wobei Z eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable ist.
Hinweis: Betrachten Sie die standardisierte Zufallsvariable $(S_n - \mathbf{E}[S_n])/\sqrt{V(S_n)}$.