# Präsenzübungsblatt 10

**Übungstermine:** 16.Januar 2012 - 20.Januar 2012

## Aufgabe 1

**Lösung:** a) Es ist $\mathbf{E}[Y] = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$ und $V(Y) = 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{60}{9}$. Nun ist nach der Ungleichung von Chebyshev

$$P(Y \geq 20) = P(Y - \mathbf{E}[Y] \geq 20 - \mathbf{E}[Y]) = P(Y - \mathbf{E}[Y] \geq 10) \leq \frac{\frac{60}{9}}{100} \approx 0.067.$$

b) Die Exponentialfunktion ist monoton wachsend und nicht-negativ. Wir können daher das angegebene Resultat direkt anwenden.

c) Gemäss dem angegeben Hinweis ist nur noch $\mathbf{E}[\exp(X_1)]$ zu bestimmen. Es ist

$$\mathbf{E}[\exp(X_1)] = \frac{2}{3}\exp(0) + \frac{1}{3}\exp(1) = \frac{2+e}{3}.$$

d) Mit dem Resultat aus b) erhalten wir

$$P(Y \geq 20) \leq \exp(-20)\left(\frac{2+e}{3}\right)^{30} \approx 0.0016.$$

## Aufgabe 2

**Lösung:** a) Gemäss der Approximation, die sich aus dem zentralen Grenzwertsatz ergibt, approximieren wir $S_n$ durch eine Normalverteilung mit Erwartungswert $n\,\mathbf{E}[X_1] = \frac{n}{\lambda} = 100$ und Varianz $nV(X_1) = nV(X_1) = \frac{n}{\lambda^2} = 10^4/(10^2)^2 = 1$.
b) Es ist

$$P(S_n > 105) = P\left(\frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} > \frac{105 - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}}\right) = P\left(\frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} > 5\right).$$

Unter Verwendung der Normalverteilungsapproximation behandeln wir

$$\frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}}$$

wie eine normalverteilte Zufallsvariable $Z$ mit Erwartungswert 0 und Varianz $1$. Es ist also

$$P\left(\frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} > 5\right) \approx 2.86 \cdot 10^{-7}.$$