Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei $f : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve, die nach der Bogenlänge parameterisiert ist. Ferner seien $t(s) = f'(s)$ der Tangentialvektor, $\kappa(s) = \|t'(s)\|$, $\kappa(s) \neq 0$, die Krümmung der Kurve und $n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}$ der Normalenvektor im Punkt $f(s)$.

i) Zeigen Sie, dass $t(s)$ und $n(s)$ orthogonal zueinander sind, d.h. dass $\langle t(s), n(s) \rangle = 0$.

ii) Verifizieren Sie i) für die Kurve $f(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r))$

Hinweis zu i): Berechnen Sie die Ableitung $\frac{d}{ds} \|t(s)\|_2^2 = \frac{d}{ds} \langle t(s), t(s) \rangle$ mittels der Produktregel.

Lösung: i) Da f nach Bogenlänge parameterisiert ist, gilt dass

$$\|t(s)\|_2^2 = \langle t(s), t(s) \rangle = 1,$$

d.h. diese Funktion ist konstant, so dass

$$0 = \frac{d}{ds} \langle t(s), t(s) \rangle = \langle t(s), t'(s) \rangle + \langle t'(s), t(s) \rangle$$

nach Anwendung der Produktregel. Nach Definition ist $t'(s) = n(s)\kappa(s)$, so dass
$2\kappa(s) \langle t(s), n(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle t(s), n(s) \rangle = 0$, da $\kappa(s) > 0$ nach Annahme. □
ii) Man berechnet, dass

$$\begin{aligned} t(s) &= f'(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r)), \\ t'(s) &= \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r)), \end{aligned}$$

so dass $\kappa(s) = \frac{1}{r}$, $n(s) = (-\cos(s/r), -\sin(s/r))$ und $\langle t(s), n(s) \rangle = 0$. □

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{array}.$$

i) Zeigen Sie durch Betrachtung eines Differenzenquotienten, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, im Punkt $x = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^\top$ nicht existieren.

ii) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ stetig partiell differenzierbar ist und geben Sie einen Ausdruck für den Gradienten ∇f an.

Lösung: i) Für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ betrachten wir folgenden Grenzwert im Punkt $x = \mathbf{0}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \frac{\|he_i\| - \|\mathbf{0}\|}{h} = \frac{|h|}{h}, \quad e_i : \; i - \text{ter kanonischer Basisvektor.}$$

Für $h \downarrow 0$ ist die rechte Seite $+1$, für $h \uparrow 0$ erhält man -1. Folglich existiert der Grenzwert nicht. Definitionsgemäß ist daher f im Ursprung in keine der Koordinatenrichtungen $\{e_i\}_{i=1}^n$ differenzierbar. $\square$

ii) Betrachte für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{rccl} f_i: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & f_i(z;x) := \sqrt{z^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2} \end{array}$$

f_i ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, falls $x_j \neq 0$ für zumindest ein $j \neq i$, da die Funktionen $v \mapsto v^2 + b$ für ein $b \in \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ und $u \mapsto \sqrt{u}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (und damit auch deren Verkettung) differenzierbar sind (auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Analog ist f_i auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar falls $x_j = 0$ für alle $j \neq i$. Für $x \neq \mathbf{0}$ lassen sich also die partiellen Ableitungen bestimmen. Man berechnet gemäß den üblichen Differentiationsregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{df_i}{dz}(x_i) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_i^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2}} = \frac{x_i}{\|x\|},\ i = 1, \ldots, n.$$

Entsprechend ist der Gradient durch $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ gegeben. Wir zeigen nun, dass die partiellen Ableitungen stetig sind. Sei $\{x^{(k)}\}$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^\infty$, $x^\infty \neq \mathbf{0}$. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \frac{x_i^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} = \frac{x_i^\infty}{\|x^\infty\|},$$

wobei man benutzt, dass wenn $(a^{(k)})$ und $(b^{(k)})$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit Grenzwerten a bzw. b, $b \neq 0$ sind, dass $\lim_{k\to\infty} \frac{a^{(k)}}{b^{(k)}} = \frac{a}{b}$. Nach dem Folgenkriterium sind die partiellen Ableitungen also stetig.