Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes Prof. Dr. Matthias Hein Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Hausübungsblatt 8

Abgabe: Freitag, 13.01.2012, **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 1

Prisoner's paradox
In einem dunklen Land werden drei Personen A, B, C in einem Kerker ohne Prozess gefangen halten. Ihr Wächter erzählt ihnen, dass der Diktator des Landes sich entschieden hat, einen der Gefangenen freizulassen, während die zwei anderen erschossen werden sollen. Der Wächter darf keinem der Gefangenen dessen Schicksal verraten. Person A fragt den Wächter, ihm den Namen (ausser dem eigenen) eines Gefangenen zu nennen, der getötet wird. Der Wächter nennt Person B. Wie gross ist nun die Chance, dass Person A überlebt ?
(6 Bonuspunkte)

Aufgabe 2

a) Gegeben Sei eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit π 'Zahl' liefert, wenn man sie wirft. Man betrachte die Zufallsvariable X: 'Anzahl Würfe, bis zum ersten mal Zahl erscheint'. Zeigen Sie, dass

$$P(X = k) = \pi(1 - \pi)^{k-1}, \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

Man sagt, dass X geometrisch verteilt ist mit Parameter π.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\pi}$.

c) *Coupon collector's problem.*
Karl Theodor kauft wöchentlich eine Packung Cornflakes. Jede Packung enthält ein Sammelbild, das einen bestimmten Fussballspieler einer berühmten Fussballmannschaft zeigt, die aus ingesamt n Spielern besteht. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung das Bild eines bestimmten Spielers enthält ist $1/n$ für alle Spieler. Die Packungen können als unabhängig, identisch verteilte Wiederholungen betrachtet werden. Man betrachte die Zufallsvariable N:'Anzahl gekaufter Packungen, bis Karl Theodor alle n unterschiedlichen Bilder besitzt'.
Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{E}[N] = n \cdot H_n, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(2 + 3 + 3 Bonuspunkte)

Aufgabe 3

Seien X, Y Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[Y^2] < \infty$. Zeigen Sie die Varianzzerlegung

$$V(Y) = V_X(\mathbf{E}_Y[Y|X]) + \mathbf{E}_X[V_Y(Y|X)].$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von der iterierten Erwartung aus der Vorlesung. (6 Bonuspunkte)