Musterlösungen zum Hausübungsblatt 8

Aufgabe 1

Lösung: Definiere folgende Ereignisse

A: Person A wird begnadigt
B: Person B wird begnadigt
C: Person C wird begnadigt
W_B: Wächter sagt, Person B wird hingerichtet
W_C: Wächter sagt, Person C wird hingerichtet

Gesucht ist

$$P(A|W_B) = \frac{P(A \cap W_B)}{P(W_B)}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich anhand einer Wahrscheinlichkeitstafel von der folgenden Form ermitteln. Da der Diktator völlig willkürlich handelt ist $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

	A	B	C	
W_B				
W_C				
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Wir fülle nun diese Wahrscheinlichkeitstafel. Setze $P(W_B|A) = \beta$, wobei $\beta \in [0,1]$. Dann ist $P(W_C|A) = 1 - \beta$ sowie

$$P(W_B \cap A) = P(W_B|A)P(A) = \frac{\beta}{3}, \qquad P(W_C \cap A) = \frac{1-\beta}{3}.$$

Ferner ist $P(W_B|B) = P(W_C|C) = 0$. Die vervollständigte Wahrscheinlichkeitstafel ist daher

	A	B	C	
W_B	$\beta/3$	0	$1/3$	$(\beta+1)/3$
W_C	$(1-\beta)/3$	$1/3$	0	$(2-\beta)/3$
	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

Es folgt, dass

$$P(A|W_B) = \frac{P(A \cap W_B)}{P(W_B)} = \frac{\beta/3}{(1+\beta)/3} = \frac{\beta}{1+\beta},$$

so dass $0 \leq P(A|W_B) \leq \frac{1}{2}$. Nimmt man $\beta = \frac{1}{2}$ an, so beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 2

Lösung: a) Für $k \in \mathbb{N}$ lässt sich das Ereignis $\{X = k\}$ darstellen als

$$\{X = k\} = \left(\bigcap_{l=1}^{k-1} \{B_l = 0\} \right) \cap \{B_k = 1\}.$$

wobei $\{B_l\}_{l=1}^k$ unabhängig identische verteilte Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit π sind. Daraus folgt unmittelbar der angegebene Ausdruck für $P(X = k)$.
b)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi(1-\pi)^{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\pi(1-\pi)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k\pi(1-\pi)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \pi(1-\pi)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\pi(1-\pi)^k + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \pi(1-\pi)^{k-1}}_{=1} \\ &= (1-\pi)\sum_{k=1}^{\infty} k\pi(1-\pi)^{k-1} + 1 \\ &= (1-\pi)\,\mathbf{E}[X] + 1.\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\pi\,\mathbf{E}[X] = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{E}[X] = \frac{1}{\pi}$.
c) Definiere Zufallsvariablen W_ℓ: 'Anzahl gekaufter Packungen bis zum Erhalt des ℓ-ten Bildes, wenn man bereits $\ell - 1$ verschiedene Bilder besitzt', $\ell = 1, \ldots, n$. Es ist $N = W_1 + \ldots + W_n$. Die Zufallsvariable W_ℓ ist geometrisch verteilt mit Parameter $\frac{n-\ell+1}{n}$, $\ell = 1, \ldots, n$, und gemäss Teil b) ist $\mathbf{E}[W_\ell] = \frac{n}{n-\ell+1}$ und daher

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[N] = \mathbf{E}[W_1 + \ldots + W_n] &= \mathbf{E}[W_1] + \ldots + \mathbf{E}[W_n] \\ &= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \ldots + \frac{n}{1} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = n \cdot H_n\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Lösung: Es ist

$$V_X(\mathbf{E}_Y[Y|X]) = \mathbf{E}_X[\{\mathbf{E}_Y[Y|X]\}^2] - (\mathbf{E}_X[\mathbf{E}_Y[Y|X]])^2 = \mathbf{E}_X[\{\mathbf{E}_Y[Y|X]\}^2] - \mathbf{E}[Y]^2,$$

nach dem Satz von der iterierten Erwartung. Für den zweiten Ausdruck erhalten wir

$$\mathbf{E}_X[V_Y(Y|X)] = \mathbf{E}_X[\{\mathbf{E}_Y[Y^2|X]\}] - \mathbf{E}_X\left[\{\mathbf{E}_Y[Y|X]\}^2\right] = \mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}_X\left[\{\mathbf{E}_Y[Y|X]\}^2\right],$$

durch erneute Anwendung des Satzes von der iterierten Erwartung. Addition beider Terme liefert $\mathbf{E}[Y^2] - (\mathbf{E}[Y])^2 = V(Y)$.