**Mathematik für Informatiker III**
Universität des Saarlandes Prof. Dr. Matthias Hein Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

---

# Hausübungsblatt 7

**Abgabe**: Freitag, 9.12.2011, **vor** der Vorlesung.

## Aufgabe 1

Betrachten Sie die Kugel im $\mathbb{R}^3$ um den Ursprung mit Radius $R > 0$, d.h.

$$B(0;R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

a) Zeigen Sie, dass sich $B(0;R)$ durch das Bild folgender Abbildung $\Phi$ beschreiben lässt.

$$\Phi : \ [0,R] \times [0,2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\varphi,\theta) \mapsto \Phi(r,\varphi,\theta),$$
$$\Phi(r,\varphi,\theta) := (r\cos(\varphi)\cos(\theta), \ r\sin(\varphi)\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

$(r,\varphi,\theta)$ heissen *Kugelkoordinaten*. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie $\det(D\Phi(r,\varphi,\theta))$, wobei $D\Phi(r,\varphi,\theta)$ die Jacobi-Matrix von $\Phi$ in $(r,\varphi,\theta)$ bezeichnet. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie

$$\int_{B(0;R)} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ dx \ dy \ dz,$$

durch Integration in Kugelkoordinaten. (3 Punkte)
**Hinweis**: Benutzen Sie die Transformationsformel.

## Aufgabe 2

Verwenden Sie im Folgenden, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}. \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right) \ dx = (2\pi)^{n/2} \ \text{(2 Punkte).}$$

**Hinweis:** Verwenden Sie $(*)$ und den Satz von Fubini.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $\mu \in \mathbb{R}^n$.
Betrachten Sie die Abbildung $x \mapsto T(x), \ \ T(x) := Ax + \mu =: y$. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\|T(x)\|^2\right) \ dx. \ \text{(2 Punkte)}$$

**Hinweis:** Benutzen Sie die Transformationsformel und a).

c) Zeigen Sie, dass $\|x\|^2 = (y-\mu)^\top B^{-1}(y-\mu)$, $B = AA^\top$. Kombinieren Sie dies mit dem Resultat aus b) um zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(B)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mu)^\top B^{-1}(y-\mu)\right) \ dy = 1. \ \text{(2 Punkte)}$$

Der Integrand ist die Dichte der multivariaten Gauss-Verteilung mit Erwartungswert $\mu$ und Kovarianz $B$.

## Aufgabe 3

a) Beweisen Sie das *Prinzip von Cavalieri*: sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $K_t = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \; x_n = t\}$, $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\int_K dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{K_t} dx_1 \ldots x_{n-1} \right) dt. \quad \text{(2 Punkte)}$$

**Hinweis**: Verwenden Sie den Satz von Fubini.

b) Sei $h > 0$. Benutzen Sie a), um das Volumen des Kreiskegels zu berechnen, der durch folgende Menge gegeben ist:
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq z^2, \;\; z \in [0, h]\}$. (2 Punkte)

c) Seien $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass das Volumen des von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannten Simplex $\{x \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \; \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \; \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1\}$ gleich

$$\frac{1}{n!} \det(a_1, \ldots, a_n) \qquad (\#)$$

ist.
Zeigen Sie das Resultat zunächst für $a_i = e_i$, wobei $e_i$ den $i$-ten kanonischen Basisvektor bezeichnet, $i = 1, \ldots, n$. Benutzen Sie Induktion nach $n$.
*Induktionsanfang.* $n = 1$. Der Simplex ist das Einheitsintervall mit Länge 1. Die Behauptung ist also korrekt für $n = 1$.
*Induktionsschritt.* Man nehme an, es gelte, dass

$$\int_{\Delta^{n-1}} d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}, \quad \Delta^k := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^k : \; \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, k, \; \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq 1 \right\}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Benutzen Sie dann das Prinzip von Cavalieri, um zu zeigen, dass

$$\int_{\Delta^n} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n = \frac{1}{n!} \quad \text{(3 Punkte).}$$

Benutzen Sie anschliessend die Transformationsformel, um den allgemeinen Fall $(\#)$ zu zeigen. (2 Punkte)