Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes   Prof. Dr. Matthias Hein   Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 7

Aufgabe 1

a) Die Kugel $B(R;0)$ lässt sich als disjunkte Vereinigung von Sphären S_r mit Radius r, $0 \leq R$ darstellen, d.h.

$$S_r = \bigcup_{0 \leq r \leq R} S_r, \quad S_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = r^2\}.$$

Es genügt, die angegebene Parametrisierung für S_1 ist zu verifieren; die Parametrisierung von S_r folgt durch Reskalierung. Die Sphäre S_1 lässt sich wiederum darstelllen als disjunkte Vereinigung von (translatierten) Kreisen in der (x,y)-Ebene darstellen, d.h.

$$S_1 = \bigcup_{-1 \leq z \leq 1} \{(x,y,z) : \; x^2+y^2 = 1-z^2\}.$$

Für $z=0$ erhält man den Einheitskreis in der (x,y)-Ebene, der sich durch $(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$, $\varphi \in [0,2\pi]$ darstellen lässt. Anschaulich gesprochen muss für $|z|>0$ der Radius der Kreise um einen Faktor schrumpfen, der von z abhängt. Setzt man $z = \sin(\theta), \; \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ (so dass tatsächlich $z \in [-1,1]$), so erhält man die Bedingung $x^2+y^2 = 1-\sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ nach dem Satz von Pythagoras. Die Kreise werden also durch die Parametrisierung

$$(\cos(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

beschrieben.
b) Man berechnet, dass

$$D\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\cos(\theta) & -r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Determinante entwickeln wir nach der dritten Zeile. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\det D\Phi(r,\varphi,\theta) \\
&= \sin(\theta)(r^2\sin^2(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta) + r^2\cos^2(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta)) + r\cos(\theta)(r\cos^2(\varphi)\cos^2(\theta) + r\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)) \\
&= r^2\sin^2(\theta)\cos(\theta) + r^2\cos^3(\theta) \\
&= r^2(\cos(\theta) - \cos^3(\theta)) + r^2\cos^3(\theta) \\
&= r^2\cos(\theta) \geq 0.
\end{aligned}$$

c) Wir werten das Integral aus, indem wir eine Transformation in Kugelkoordinaten durchführen.

$$\begin{aligned}
\int_{B(R;0)} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \; dx \; dy \; dz &= \int_0^R r^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \; d\theta \; d\varphi \; dr \\
&= 2\pi \left(\int_0^R r^3 \; dr \right) \underbrace{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \; d\theta \right)}_{=2} \\
&= 4\pi \frac{1}{4} R^4 = \pi R^4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Lösung: a) Es ist

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right)$$

und somit nach dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right)\ dx_1 \ldots dx_n = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right)\ dx_i = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\ dx_1\right)^n$$

Weiter ist

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\ dx_1 = \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-z_1^2\right)\ dz_1 = \sqrt{2\pi},$$

und somit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right)\ dx = (2\pi)^{n/2}.$$

b) Die Jacobi-Matrix der angegebenen Abbildung $x \mapsto Ax + \mu$ ist A und die zugehörige Determinante ist $\det(A)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Somit ist nach der Transformationsformel

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\|y\|^2\right)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\|Ax+\mu\|^2\right) |\det(A)|\ dx \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} &\exp\left(-\frac{1}{2}\|Ax+\mu\|^2\right)\ dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|\det(A)|}. \end{aligned}$$

c) Es ist

$$(y-\mu)^\top B^{-1}(y-\mu) = ((Ax+\mu)-\mu)^\top (AA^\top)^{-1}((Ax+\mu)-\mu) = (Ax)^\top (A^\top)^{-1}A^{-1}(Ax) = x^\top x = \|x\|^2.$$

Weiter folgt aus b), dass $dy = |\det(A)|dx$. Ferner ist $\det(B) = \det(AA^\top) = (\det(A))^2$ und somit $\sqrt{\det(B)} = |\det(A)|$. Das Resultat folgt dann unmittelbar durch Einsetzen und Kürzen.

Aufgabe 3

Lösung: a) Es ist $K = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} K_t$ und somit

$$\int_K dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}\times K_t} dx_1 \ldots dx_{n-1} dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{K_t} dx_1 \ldots dx_{n-1}\right)\ dt.$$

b) Es ist

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = z^2,\ \ z \in [0,h]\} = \bigcup_{0\le z\le h} K_z,\ K_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = z^2\}$$

und daher gemäss a)

$$\int_{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le z^2,\ \ z\in[0,h]\}} dx\ dy\ dz = \int_0^h \left(\int_{K_z} dx\ dy\right) dz.$$

Das innere Integral ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises mit Radius z und somit

$$\int_0^h \left(\int_{K_z} dx\ dy\right) dz = \int_0^h \pi z^2\ dz = \frac{\pi}{3}h^3.$$

c) *Induktionsschritt.* Wir zeigen, dass

$$\int_{\Delta^n} d\lambda_1\ \ldots\ d\lambda_n = \frac{1}{n!}.$$

Für $0 \leq t < 1$ setzen wir

$$K_t = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1} : \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \leq 1 - t \right\} = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1} : \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-t} \leq 1 \right\},$$

so dass $\Delta^n = \bigcup_{0 \leq t < 1} K_t \cup \{e_n\}$. Es ist

$$\int_{K_t} d\lambda_1 \ldots \lambda_n = (1-t)^{n-1} \int_{\Delta^{n-1}} d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1} = \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

gemäss der Transformationsformel und unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung. Somit ist nach dem Prinzip von Cavalieri

$$\int_{\Delta^n} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \int_{K_t} d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}\, dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1}\, dt = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

Der allgemeine Fall betrachte man die Matrix A, deren Spalten die $\{a_i\}_{i=1}^n$ sind. Man definiere zunächst $A\Delta^n = \{A\lambda,\ \lambda \in \Delta^n\}$ und für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das gesuchte Volumen ist dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A\Delta^n}(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\Delta^n}(A^{-1}x)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\Delta^n} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \det(A) = \frac{1}{n!} \det(a_1, \ldots, a_n).$$