Mathematik für Informatiker III

Universität des Saarlandes   Prof. Dr. Matthias Hein   Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Hausübungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 02.12.2011, **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1$.

a) Zeigen Sie, dass durch die Bedingung $f(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung von $(x, y) = (1, 1)$ eine differenzierbare Funktion $z = \phi(x, y)$ mit $\phi(1, 1) = 1$ implizit definiert ist. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial x}(1, 1)$ und $\frac{\partial \phi}{\partial y}(1, 1)$. (4 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Sei $\xi = (x_0, y_0)$ ein Punkt mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung der impliziten Funktion ϕ im Punkt ξ mit $f(x_0, \phi(x_0)) = 0,\ \phi(x_0) = y_0$ gegeben ist durch

$$\phi''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)\right)^3}.$$

Hinweis: Ermitteln Sie zunächst die erste Ableitung $\phi'(x_0)$. Leiten Sie dann beide Seiten der Gleichung

$$\frac{d}{dx} f(x, \phi(x))\Big|_{x=x_0, \phi(x)=\phi(x_0)} = 0$$

nach x ab, um einen Ausdruck für $\phi''(x_0)$ zu erhalten, der noch von $\phi'(x_0)$ abhängt. Lösen Sie nach $\phi''(x_0)$ auf und setzen Sie dann den ersten Ausdruck, den Sie für $\phi'(x_0)$ erhalten haben, ein. (5 Punkte)

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ auf der Kreisscheibe
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass f im Inneren der Kreisscheibe $\overset{\circ}{D} := \{(x, y) :\ x^2 + y^2 < 1\}$ kein lokales Extremum besitzt. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie unter Verwendung der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, dass der Punkt $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$ ein globales Minimum bzw. der Punkt $\frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)$ ein globales Maximum von f auf D darstellt. (4 Punkte)
Hinweis: Nehmen Sie vereinfachend an, dass es keine weiteren Punkte als die in b) genannten Punkte gibt, die die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum unter Nebenbedingungen erfüllen und verwenden Sie das Resultat aus a) sowie die Tatsache, dass D kompakt und f stetig ist.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgendes Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen.

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \text{ mit } f(x,y) := x + y,$$

unter den zwei Nebenbedingungen

$$h_1(x,y) = h_2(x,y) = 0, \quad h_1(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1, \quad h_2(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 4.$$

a) Fertigen Sie eine Skizze des Problems an. Skizzieren Sie dazu die Mengen $\{(x,y) : h_1(x,y) = 0\}$ und $\{(x,y) : h_2(x,y) = 0\}$. In welchem Punkt (x^*, y^*) wird das Minimum unter Nebenbedingungen angenommen ? Skizzieren Sie die Gradienten $\nabla h_1(x^*, y^*)$ und $\nabla h_2(x^*, y^*)$ in diesem Punkt. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass keine Langrange-Multiplikatoren λ_1, λ_2 existieren, so dass

$$\nabla f(x^*, y^*) + \lambda_1 \nabla h_1(x^*, y^*) + \lambda_2 \nabla h_2(x^*, y^*) = 0.$$

Welche Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren ist hier verletzt ? (3 Punkte)