Musterlösungen zum Hausübungsblatt 6

Aufgabe 1

Lösung: a) In der Tat ist $f(1,1,1) = 0$. Ferner ist

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 - 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -1 \neq 0.$$

Folglich sind die Voraussetzungen zur Anwendung des Satzes über implizite Funktionen gegeben, so dass eine Funktion ϕ wie angegeben existiert.
b) Partielles Differenzieren der Gleichung $f(x,y,\phi(x,y)) = 0$ bzgl. x unter Verwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(x,y,\phi(x,y))}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,\phi(x,y))}{\partial z}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \Rightarrow \quad &\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f(x,y,\phi(x,y))}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y,\phi(x,y))}{\partial z}}. \end{aligned}$$

Analog ist

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f(x,y,\phi(x,y))}{\partial y}}{\frac{\partial f(x,y,\phi(x,y))}{\partial z}}.$$

Wir berechnen ferner, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2y - 4z, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2x + 2.$$

Auswerten der Ausdrücke an $x = y = \phi(x,y) = 1$ liefert schliesslich

$$\frac{\partial \phi(1,1)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial \phi(1,1)}{\partial y} = -4.$$

Aufgabe 2

Lösung: Einmaliges Differenzieren der Gleichung $f(x,\phi(x)) = 0$ bzgl. x liefert

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,\phi(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,\phi(x))\phi'(x) = 0, \quad \phi'(x) := \frac{d}{dx}\phi(x). \tag{1}$$

woraus

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x,\phi(x))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x,\phi(x))} \tag{2}$$

folgt. Wir leiten die Gleichung (1) erneut bzgl. x ab und erhalten dann

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,\phi(x)) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,\phi(x))\phi'(x) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,\phi(x))\phi'(x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,\phi(x))\left(\phi'(x)\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} f(x,\phi(x))\phi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Wir lösen den letzten Ausdruck nun nach $\phi''(x)$ auf:

$$\phi''(x) = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,\phi(x)) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,\phi(x))\phi'(x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,\phi(x))\left(\phi'(x)\right)^2}{\frac{\partial}{\partial y} f(x,\phi(x))}.$$

Anschliessend setzen wir den Ausdruck (2) in diese Gleichung ein und vereinfachen. Wir erhalten

$$\phi''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\phi(x))\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\phi(x))\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\phi(x))\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))\right)^3}.$$

Einsetzen von $x = x_0$, $(x, \phi(x)) = \xi$ liefert dann den angegebenen Ausdruck.

Aufgabe 3

Lösung: a) Man berechnet, dass

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{pmatrix}, \qquad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $(0,0)^\top$ ist ein stationärer Punkt. Jedoch erhält man für die Eigenwerte der Hesse-Matrix mittels des charakteristischen Polynoms

$$\det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1,\; \lambda_2 = 9,$$

-1 und 9, d.h. die Hesse-Matrix ist indefinit und der stationäre Punkt kein lokales Extremum.
b) Nachdem f in $\mathring{D}$ kein lokales Extremum besitzt, untersuchen wir f auf Extrema auf dem Rand ∂D, d.h. unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Die zugehörige Lagrange-Funktion hat die Form

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y).$$

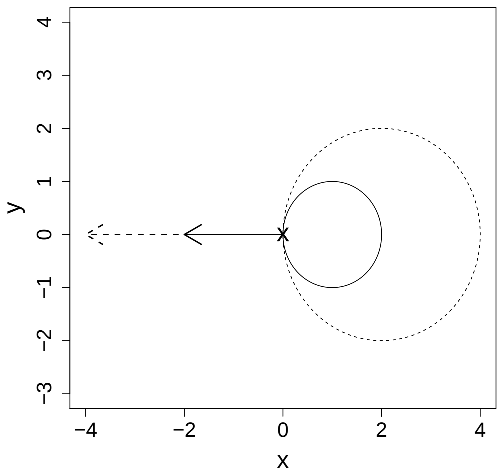
Ein Extremum unter Nebenbedingungen erfüllt die notwendige Bedingung $\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$, d.h.

$$\begin{aligned} &8x^* - 3y^* + 2\lambda^* x^* = 0, \\ &-3x^* + 2\lambda^* y^* = 0, \\ &(x^*)^2 + (y^*)^2 = 1 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen verifiziert man, dass der Punkt $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$ (mit $\lambda^* = \frac{1}{2}$) und der Punkt $\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)$ (mit $\lambda^* = -\frac{9}{2}$) dieses Gleichungssystem erfüllen. Es ist $f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\right) = -\frac{1}{2}$ und $f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)\right) = \frac{9}{2}$. In a) wurde gezeigt, dass f in $\mathring{D}$ kein lokales Extremum besitzt. Da f stetig und D kompakt ist, nimmt f nach dem Satz von Weierstrass Minimum und Maximum am Rand an. Unter der Annahme, dass es keine weiteren Kandidaten für Extrema unter Nebenbedingungen gibt, folgt, dass die gefundenen Punkte globale Optima sind. (Es lässt sich weiter zeigen, dass es genau ein weiteres lokales Minimum bzw. genau ein lokales Maximum mit jeweils den gleichen Funktionswerten gibt.)

Aufgabe 4

Lösung: a) Die folgende Abbildung stellt die Mengen $\mathcal{C}_1 := \{(x,y) : \; h_1(x,y) = 0\}$ (Kreis mit Mittelpunkt $(1,0)$ und Radius 1, durchgezogene Linie) und $\mathcal{C}_2 := \{(x,y) : \; h_2(x,y) = 0\}$ (Kreis mit Mittelpunkt $(2,0)$ und Radius 2, gestrichelte Linie) dar.



Es ist $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(0,0)\}$, d.h. $(x^*, y^*) = (0,0)$. Die Gradienten $\nabla h_1(x^*, y^*) = (-2,0)^\top$ und $\nabla h_2(x^*, y^*) = (-4,0)^\top$ sind in obiger Abbildung als Pfeile dargestellt.

b) Es ist $\nabla f(x^*, y^*) = (1,1)^\top$, so dass $\nabla f(x^*, y^*)$ nicht als Linearkombination von $\{\nabla h_1(x^*, y^*), \nabla h_2(x^*, y^*)\}$ geschrieben werden kann. Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren ist, dass die Jacobi-Matrix der Funktion H, die beide Nebenbedingungen spezifiziert, im Punkt (x^*, y^*) Rang 2 hat. Jedoch ist

$$DH(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \; H(x,y) = \begin{pmatrix} h_1(x,y) \\ h_2(x,y) \end{pmatrix},$$

d.h. $DH(x^*, y^*)$ ist Rang-defizitär, was bereits aus obiger Abbildung (Kollinearität der Gradienten $\nabla h_1(x^*, y^*)$, $\nabla h_2(x^*, y^*)$) offensichtlich ist.