# Hausübungsblatt 5

**Abgabe**: Freitag, 25.11.2011, **vor** der Vorlesung.

## Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$, $x, y \in \mathbb{R}$. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = 16xy - x^4 - y^4$, für $x \in (-1, 1), y \in (-1, 1)$ kein lokales Extremum hat. Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f$ für $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$. (5 Punkte)

## Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so dass $Hf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv definit ist. Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum von $f$ auch ein globales Minimum ist. (3 Punkte)
**Hinweis**: Argumentieren Sie über eine Taylorentwicklung 1. Ordnung (d.h. Taylorpolynom ist 1. Ordnung und Restglied 2. Ordnung).

## Aufgabe 3

a) Seien $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, \dots, n$, Punkte in der Ebene. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a, b$ der Gerade $y = ax + b$, so dass

$$\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$$

minimal wird. Diese erhaltene Gerade heisst Ausgleichsgerade. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie zu folgenden Punkten die Ausgleichsgerade und skizzieren Sie die Punkte sowie die Ausgleichsgerade. (2 Punkte)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.9 | 2.6 | 5.1 | 6.2 | 8.3 | 8.9 |

## Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Betrachten Sie das folgende nichtlineare Gleichungsystem in den Variablen $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Ax - \lambda x &= 0, \\ \|x\|^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

a) Betrachten Sie die Newton-Iteration zur iterativen Lösung dieses Systems, d.h. ein Gleichungssystem von der Form

$$y^{k+1} = y^k - \{D_g(y^k)\}^{-1} g(y^k), \quad y = (x\ \lambda)^\top.$$

Geben Sie $g(y) = g((x\ \lambda))$ und die Jacobi-Matrix $D_g(y)$ von $g$ im Punkt $y$ an. (4 Punkte)

b) Führen Sie einen Newton-Schritt für folgende Matrix $A$ und folgende Startpunkte $x^0$, $\lambda^0$ durch. (2 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad x^0 = (0\ 1)^\top,\ \lambda^0 = 3.$$