Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes — Prof. Dr. Matthias Hein — Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 5

Aufgabe 1

Lösung: a) Man berechnet

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 2 \\ 2y - x + 1 \end{pmatrix}, \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssytem $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$. Man erhält den stationären Punkt $(1,0)^\top$. Die Eigenwerte der Hesse-Matrix berechnet man leicht über das charakterische Polynom ($\rightarrow$ lineare Algebra) als 3 und 1. Die Hesse-Matrix hat also nur positive Eigenwerte, d.h. sie ist positiv definit und der gefundene stationäre Punkt ist ein lokales Minimum.
b) Man berechnet

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 16y - 4x^3 \\ 16x - 4y^3 \end{pmatrix}, \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 16 \\ 16 & -12y^2 \end{pmatrix}.$$

Man verifiziert leicht, dass die Gleichung $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ nur für $x = y = 0$ erfüllt ist. Es ist

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Spur der Hesse-Matrix ist gleich der Summe deren Eigenwerte. Nachdem die Spur hier 0 und die Hesse-Matrix vollen Rang besitzt folgt, dass die Matrix zwei betragsgleiche Eigenwerte unterschiedlichen Vorzeichens hat. Die Hesse-Matrix ist also indefinit, und bei dem gefundenen stationären Punkt handelt es sich demnach nicht um ein lokales Extremum. Die globalen Extrema von f auf dem Kompaktum $[-1,1] \times [-1,1]$ sind $(1,1)$, $(-1,-1)$ (Maxima) und $(-1,1)$, $(1,-1)$ (Minima).

Aufgabe 2

Lösung: Nach dem Satz von Taylor gilt $\forall y, x \in \mathbb{R}^n \; \exists \theta \in [0,1]$, so dass

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + (y - x)^\top Hf(\theta x + (1-\theta) y)(y - x) \\ &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \end{aligned}$$

da $v^\top Hf(u) v \geq 0$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$. Sei x nun ein lokales Minimum, woraus folgt, dass $\nabla f(x) = \mathbf{0}$. Die letzte Ungleichung wird dann zu $f(y) \geq f(x)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3

Lösung: a) Das gegebene Problem besteht darin, die Funktion

$$Q(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (a x_k + b - y_k)^2$$

zu minimieren. Es ist

$$\nabla Q(a,b) = \begin{pmatrix} 2 \sum_{k=1}^n x_k (a x_k + b - y_k) \\ 2 \sum_{k=1}^n (a x_k + b - y_k) \end{pmatrix}.$$

Eine Extremalstelle (a^*, b^*) erfüllt die Bedingung $\nabla Q(a^*, b^*) = \mathbf{0}$. Dies kann als folgendes lineares Gleichungssystem geschrieben werden:

$$\nabla Q(a^*, b^*) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k \end{pmatrix}.$$

Lösung des linearen Systems liefert

$$a^* = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}, \qquad b^* = \bar{y} - a^* \bar{x}, \qquad \bar{x} := \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}, \;\; \bar{y} := \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{n}. \tag{1}$$

Diese Lösung erhält man wie folgt. Man verwende zunächst, dass die Inverse einer 2×2-Matrix gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten somit, dass

$$\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = \frac{1}{n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2} \begin{pmatrix} n & -\sum_{k=1}^n x_k \\ -\sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Unter Verwendung der Beziehungen

$$\sum_{k=1}^n x_k = n\bar{x}, \quad \sum_{k=1}^n y_k = n\bar{y},$$
$$\sum_{k=1}^n x_k y_k - n\bar{x}\bar{y} = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}), \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

erhält man durch geeignete Umformungen das Resultat (1) aus (2).
Es lässt sich weiter zeigen, dass

$$HQ(a, b) = \begin{pmatrix} 2\sum_{k=1}^n x_k^2 & 2\sum_{k=1}^n x_k \\ 2\sum_{k=1}^n x_k & 2n \end{pmatrix} \;\forall a, b \in \mathbb{R}^n,$$

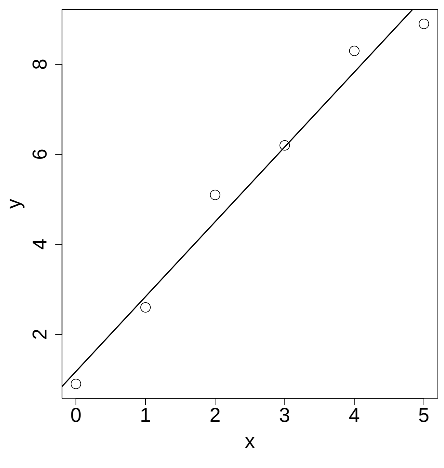
und dass diese Matrix positiv definit ist, d.h. die Bedingung aus Aufgabe 2 ist erfüllt, d.h. (a^*, b^*) ist eine globale Minimalstelle.
b) Man berechnet

$$\bar{x} = \frac{15}{6} = 2.5, \quad \bar{y} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}, \quad \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = 17.5, \quad \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = 29.1,$$

und somit

$$a^* = 1.662857, \qquad b^* = 1.17619.$$

Grafisch lässt sich dies wie folgt veranschaulichen.



Aufgabe 4

Lösung: a) Setze $y = (x\ \lambda)$. Wir definieren die Funktion $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ wie folgt:

$$g(y) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \|x\|^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichunssystem kann dann geschrieben werden als $g(y) = \mathbf{0}$. Damit kann die Jacobi-Matrix in der folgenden Blockgestalt geschrieben werden:

$$D_g(y) = \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & -x \\ 2x^\top & 0 \end{pmatrix},$$

wobei I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet.
b) Der Newton-Schritt kann geschrieben werden als

$$y^{k+1} = y^k + d^k,$$

wobei d^k das folgende lineare Gleichungssystem löst:

$$D_g(y^k)d^k = -g(y^k).$$

Einsetzen von $y^0 = (x^0, \lambda^0)$ liefert das folgende lineare System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $d_1^1 = d_2^1 = 0$, $d_3^1 = 1$. Tatsächlich ist dann $y^1 = (0, 1, 4)^\top$ eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wie man leicht nachrechnet.