Hausübungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 18.11.2011, **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 1

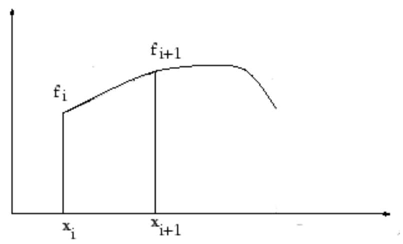
Bestimmen Sie die Taylorpolynome zweiter Ordnung folgender Funktionen um $(0,0)^\top$:

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y), \qquad f(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right).$$

Benutzen Sie diese, um Näherhungswerte für die Funktionswerte $\sin(0.1)\cos(-0.1)$ und $\exp(-\frac{1}{2}(0.1^2+0.1^2))$ zu erhalten. (5 + 5 Punkte)

Aufgabe 2

Ziel dieser Übungsaufgabe ist es, Ableitungen von Funktionen mittels sogenannter *finiter Differenzen* zu approximieren. Dies ist ein gängiges Verfahren, wenn eine Funktion, die per se auf einem Kontinuum definiert ist, in einer praktischen Anwendung nur auf einem diskreten Gitter ausgewertet werden kann. Bei dieser Technik spielt der Satz von Taylor eine wichtige Rolle.



Im folgenden seien $x_i = ih$, $i \in \mathbb{Z}$, $h > 0$, der Abstand der Gitterpunkte, $f_i = f(x_i)$, $f_{i\pm1} = f(x_i \pm h)$, $f'_i = f'(x_i)$ usw. für eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter benutzen wir die übliche Landau-Notation: für eine Funktion ϕ von h ist

$$\phi(h) = O(g(h)) \text{ falls } \limsup_{h\to0} |\phi(h)/g(h)| < \infty.$$

a) *Erste Ableitung.*
i) Zeigen Sie, dass

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h), \qquad \text{(Vorwärtsdifferenz)}, \quad \text{(1 Punkt)}$$

ii) Betrachten Sie die Approximation

$$f'_i = \alpha f_{i+1} + \beta f_{i-1} + e(h)$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten α, β, so dass $e(h)$ höchstens $O(h)$ ist. Führen Sie dazu Taylorentwicklungen erster Ordnung von $f_{i\pm1}$ um x_i durch und setzen Sie diese in den Term $\alpha f_{i+1} + \beta f_{i-1}$ ein, um einen Ausdruck von der Form

$$f_i c_1(\alpha,\beta) + f'_i c_2(\alpha,\beta) + E(h)$$

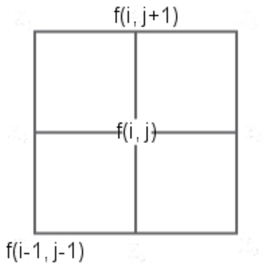
zu erhalten, wobei $c_{1/2}$ Koeffizienten sind und E ein Fehlerterm ist. Da der letzte Term für $h \to 0$ mit f_i' übereinstimmen soll, müssen α, β ein lineares Gleichungssystem erfüllen. Stellen Sie dieses auf und lösen Sie nach α, β auf, und bestimmen Sie die Ordnung von $e(h)$. (4 Punkte)

b) *Zweite Ableitung*: Zeigen Sie, dass

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + O(h^2),$$

indem Sie Taylorentwicklungen dritter Ordnung von $f_{i\pm1}$ um x_i durchführen. (2 Punkte)

Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die auf Gitterpunkten $x_i = ih,\ y_j = jk, i, j \in \mathbb{Z}, h, k > 0$, ausgewertet wird. Analog zu oben ist $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$, $f_{i\pm1,j\pm1} = f(x_{i\pm1}, y_{j\pm1})$ usw.



c) *Laplace-Operator*: Benutzen Sie Teil b), um ein Approximationsschema für $\Delta f(x_i, y_j)$ mit Fehlerterm von der Ordnung $O(h^2 + k^2)$ zu definieren. (2 Punkte)

d) *gemischte Ableitungen*: Sei nun $h = k$. Betrachten Sie die Approximation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1}}{4h^2}.$$

Zeigen Sie mittels des Satzes von Taylor für Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dass diese Approximation konsistent ist, d.h. dass der Fehler höchstens von der Ordnung $O(h)$ ist. (5 Punkte)