Musterlösungen zum Hausübungsblatt 4

Aufgabe 1

Lösung: Das Taylor-Polynom zweiter Ordnung im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0)^\top$ ist von der Form

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^\top Hf(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Für $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ sind Gradient bzw. die Hesse-Matrix gegeben durch:

$$\nabla f(x,y) = (\cos(x)\cos(y) \quad -\sin(x)\sin(y))^\top, \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}.$$

Auswertung am Entwicklungspunkt $(x_0, y_0)^\top = (0,0)^\top$ liefert

$$\sin(0.1)\cos(-0.1) = f(0.1, -0.1) \approx 0 + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \right\rangle + 0 = 0.1$$

Tatsächlich ist $\sin(0.1)\cos(-0.1) = 0.09933467\ldots$.
Für $f(x,y) = \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2))$ sind Gradient bzw. die Hesse-Matrix gegeben durch:

$$\nabla f(x,y) = -(xf(x,y) \;\; yf(x,y)), \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 f(x,y) - f(x,y) & xyf(x,y) \\ xyf(x,y) & y^2 f(x,y) - f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Auswertung am Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)^\top$ liefert

$$f(0.1, 0.1) = \exp(-\frac{1}{2}(0.1^2 + 0.1^2)) \approx 1 + 0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2} 2 \cdot 0.1^2 = 0.99.$$

Tatsächlich ist $\exp(-\frac{1}{2}(0.1^2 + 0.1^2)) = 0.9900498\ldots$.

Aufgabe 2

Lösung: a), i). Eine Taylorentwicklung erster Ordnung liefert

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + O(h^2).$$

Einsetzen und Kürzen liefert dann das Resultat.
a, ii) Taylorentwicklungen erster Ordnungen liefert:

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + hf'_i + O(h^2), \\ f_{i-1} &= f_i - hf'_i + O(h^2). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert den Term

$$\alpha f_{i+1} + \beta f_{i-1} = (\alpha + \beta) f_i + (\alpha - \beta) h f'_i + O(h^2).$$

Dieser Term soll für $h \to 0$ gleich f'_i sein. Daraus folgen die zwei Bedingungen

$$\alpha + \beta = 0, \qquad \alpha - \beta = \frac{1}{h}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\beta = -\alpha$ und schliesslich $\alpha = \frac{1}{2h}$, $\beta = -\frac{1}{2h}$. Durch Einsetzen der Koeffizienten ist es leicht zu sehen, dass sich die beiden linearen Terme aufheben, so dass der Fehlerterm von der Ordnung $O(h^2)$ ist.
b) Wir führen Taylorentwicklungen dritter Ordnung durch.

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + hf_i' + \frac{1}{2}h^2 f_i'' + \frac{1}{6}h^3 f_i''' + O(h^4), \\ f_{i-1} &= f_i - hf_i' + \frac{1}{2}h^2 f_i'' - \frac{1}{6}h^3 f_i''' + O(h^4). \end{aligned}$$

Einsetzen in das angegebene Approximationschema und Kürzen liefert das Resultat. Man beachte, dass sich die Terme dritter Ordnung gegenseitig aufheben.
c) Im folgenden benutzen wir die Kurzschreibweisen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\Big|_{i,j} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_i, y_j), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f\Big|_{i,j} := \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_i, y_j), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f\Big|_{i,j} := \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_i, y_j) \text{ usw.}$$

Es ist

$$\Delta f\Big|_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f\Big|_{i,j} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f\Big|_{i,j}.$$

Betrachte das Approximationschema

$$\Delta f\Big|_{i,j} \approx \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{h^2} + \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{h^2}.$$

Dieses Schema baut in natürlicher Weise auf dem Schema von Aufgabenteil b) auf: der erste Term approximiert die zweite Ableitung in x-Richtung, der zweite Term die zweite Ableitung in y-Richtung. Da sich die partiellen 2. Ableitungen (nicht-gemischt) wie die zweiten Ableitungen einer eindimensionalen Funktion verhalten, wobei die zweite Variable als fix betrachtet wird, und die Feinheit des Gitters in x-Richtung h bzw. in y-Richtung k ist, ist es offensichtlich, dass die Argumentation aus Teil b) zur Abschätzung auf die beiden Terme angewandt werden kann. Exemplarisch betrachte man eine Taylorentwicklung von der Form

$$f_{i,j\pm 1} = f_{i,j} \pm k \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{i,j} + \frac{1}{2}k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{i,j} \pm \frac{1}{6}k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Big|_{i,j} + O(k^4).$$

d) Wir führen eine zweidimensionale Taylorentwicklung für die Funktionswerte $f_{i+1,j+1}, f_{i-1,j-1}, f_{i+1,j-1}, f_{i-1,j+1}$ um den Entwicklungspunkt (x_i, y_j) durch. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f_{i\pm 1,j\pm 1} &= f_{i,j} + \nabla f\Big|_{i,j}^\top \begin{pmatrix} \pm h \\ \pm k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}^\top Hf\Big|_{i,j} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + O(h^3), \\ f_{i+1,j-1} &= f_{i,j} + \nabla f\Big|_{i,j}^\top \begin{pmatrix} h \\ -k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h \\ -k \end{pmatrix}^\top Hf\Big|_{i,j} \begin{pmatrix} h \\ -k \end{pmatrix} + O(h^3), \\ f_{i-1,j+1} &= f_{i,j} + \nabla f\Big|_{i,j}^\top \begin{pmatrix} -h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -h \\ k \end{pmatrix}^\top Hf\Big|_{i,j} \begin{pmatrix} -h \\ k \end{pmatrix} + O(h^3). \end{aligned}$$

Wir setzen diese Entwicklungen nun in den Zähler

$$f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} \tag{1}$$

des angegebenen Approximationsschemas ein. Es ist leicht zu sehen, dass die Terme nullter und erster Ordnung sich gegenseitig aufheben. Es bleiben die quadratischen Terme von der Form

$$\frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{i,j}, \quad \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{i,j}, \quad \pm h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{i,j}.$$

Die nicht-gemischten Terme zweiter Ordnung kommen in obigen Entwicklungen insgesamt viermal mit jeweils dem gleichen Vorzeichen vor. In (1) kommen beide Vorzeichen je zweimal vor. Eine ähnliche Argumentation liefert, dass sich die gemischten Term nicht aufheben. Wir erhalten

$$f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{i,j} + O(h^3).$$

Division durch den Nenner des Approximationschema liefert dann die Konsistenz.