Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes | Prof. Dr. Matthias Hein | Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Hausübungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 11.11.2011, **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0)^\top, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

i) Zeigen Sie: f ist in $(0, 0)^\top$ total differenzierbar. (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie: f ist in $(0, 0)^\top$ nicht stetig partiell differenzierbar. (4 Punkte)

Hinweise: i) Berechnen Sie das Differential (Gradient) im Ursprung und überprüfen Sie durch Einsetzen, ob die Definition für totale Differenzierbarkeit erfüllt ist. ii) Betrachten Sie $\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0)^\top, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

i) Zeigen Sie: f ist in $(0, 0)^\top$ stetig. (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie: f ist in $(0, 0)^\top$ nicht total differenzierbar. (4 Punkte)

Hinweise: i) Benutzen Sie das Folgenkriterium. ii) Gehen Sie wie in Aufgabe 1, i) vor.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) := (4y, 3x^2 - 2\sin(yz), 2yz) \end{array}$$

und bestimmen Sie der Menge der Punkte, an denen die Jacobi-Matrix nicht invertierbar ist.
Hinweis: Argumentieren Sie mittels der Determinante der Matrix. (6 Punkte)

Aufgabe 4

i) Zeigen Sie: Sind $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to U$ total differenzierbar, so gilt für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $x \in V$:

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x))\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x), \quad y_j := g_j(x).$$

(2 Punkte)

ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $g(x) = f(a^\top x + b)$, wobei $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. (2 Punkte).