Hausübungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 4.11.2011, **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 1

Sei $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, d.h. $x^\top Ax > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, und sei $\{x^{(k)}\}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie:
   i) Die Abbildung $x \mapsto \|x\|_A := \sqrt{x^\top Ax}$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.
   ii) Die Folge $\{x^{(k)}\}$ konvergiert gegen einen Grenzwert x bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ genau dann, wenn $\{x^{(k)}\}$ gegen x bzgl. der Norm $\|\cdot\|_A$ konvergiert.

b) Begründen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax$ beliebig oft differenzierbar ist und berechen Sie den Gradienten $\nabla f(x)$, die Hesse-Matrix $Hf(x)$ und den Laplace-Operator $\Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$. (3+2+6 Punkte).

Aufgabe 2

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D : \ \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto f(x) := a^\top x + b$, wobei $a \in \mathbb{R}^n, \ b \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist. (3 Punkte)

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen M von $\mathbb{R}^2$ auf Offenheit und Abgeschlossenheit bzgl. der Euklidischen Norm. Bestimmen Sie ausserdem den Abschluss $\overline{M}$, das Innere $\mathring{M}$ und den Rand ∂M.

i) $M = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 | x \in [0, 1], \ x = y\}$, ii) $M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \times \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \right\}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4

Im Folgenden bezeichne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion und $D_v f(\xi) := \langle \nabla f(\xi), v\rangle$ die Richtungsableitung der Funktion f in ξ in Richtung des Vektors v, $\|v\| = 1$.

i) Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^3 \sin(y) + \exp(x)y^2$. Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung des Einheitsvektors $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top$ in $\xi = (0, 1)^\top$.

ii) Sei $\nabla f(\xi) \neq \mathbf{0}$. Zeigen Sie, dass die Richtung v^* des grössten Anstiegs von f im Punkt ξ, definiert durch
$$D_{v^*} f(\xi) = \sup_{v:\ \|v\|\leq 1} D_v f(\xi),$$
durch $v^* = \nabla f(\xi)/\|\nabla f(\xi)\|$ gegeben ist.

iii) Berechnen Sie die Richtung v^* des grössten Anstiegs von $f(x, y) = x^2 - y^2$ im Punkt $\xi = (1, 1)^\top$ und bestimmen Sie $D_{v^*} f(\xi)$. (2+2+2 Punkte)