Musterlösungen zum Hausübungsblatt 2

Aufgabe 1

Sei $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, d.h. $x^\top Ax > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, und sei $\{x^{(k)}\}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie:

i) Die Abbildung $x \mapsto \|x\|_A := \sqrt{x^\top Ax}$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

ii) Die Folge $\{x^{(k)}\}$ konvergiert gegen einen Grenzwert x bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ genau dann, wenn $\{x^{(k)}\}$ gegen x bzgl. der Norm $\|\cdot\|_A$ konvergiert.

b) Begründen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax$ beliebig oft differenzierbar ist und berechen Sie den Gradienten $\nabla f(x)$, die Hesse-Matrix $Hf(x)$ und den Laplace-Operator $\Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$. (3+2+6 Punkte).

Lösung: a), Teil i):
Sei $\alpha > 0$. Es ist

$$\|\alpha x\|_A = \sqrt{\alpha^2 x^\top Ax} = \alpha \|x\|_A \,,$$

d.h. $\|\cdot\|_A$ ist positiv homogen. Wir zeigen nun die Dreiecksungleichung. Dazu benötigen wir, dass A positiv definit ist. Aus dem Spektralsatz (Lineare Algebra) folgt, dass

$$A = V^\top \Lambda V = B^\top B, \quad B := \Lambda^{1/2} V,$$

wobei die Spalten von V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren enthalten und $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_j > 0$ für alle $j = 1, \dots, n$, die Diagonalmatrix der Eigenwerte ist und $\Lambda^{1/2} := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Aufgrund der Positivität der Eigenwerte ist letztere Matrix wohldefiniert. Für die Dreiecksungleichung ist zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
&\|x + y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A \,,\\
\Leftrightarrow\ &\|x + y\|_A^2 \leq (\|x\|_A + \|y\|_A)^2,\\
\Leftrightarrow\ &\|x\|_A^2 + \|y\|_A^2 + 2\langle x, Ay\rangle \leq \|x\|_A^2 + \|y\|_A^2 + 2\|x\|_A \|y\|_A \,.
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\langle x, Ay\rangle \leq \|x\|_A \|y\|_A$. Da

$$\langle x, Ay\rangle = \langle x, B^\top By\rangle = \langle Bx, By\rangle \leq \|Bx\| \|By\| \,,$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt, und

$$\begin{aligned}
\|Bx\| &= \sqrt{\langle x, B^\top Bx\rangle} = \sqrt{\langle x, Ax\rangle} = \|x\|_A \,,\\
\|By\| &= \sqrt{\langle y, B^\top By\rangle} = \sqrt{\langle y, Ay\rangle} = \|y\|_A \,,
\end{aligned}$$

ist tatsächlich $\langle x, Ay\rangle \leq \|x\|_A \|y\|_A$. Die Definitheit von $\|\cdot\|_A$ (d.h. $\|x\|_A = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$) folgt unmittelbar daraus, dass A positiv definit ist.

a), Teil ii)
Es genügt zu zeigen, dass Konstanten $c, C > 0$ existieren, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$c\|y\|_2 \leq \|y\|_A \leq C\|y\|_2 \,, \tag{1}$$

d.h., dass die Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind. Wir wenden hierfür erneut den Spektralsatz wie oben in Teil i) an. Definiere

$$\lambda_{\min} = \min_{1\le j\le n} \lambda_j, \quad \lambda_{\max} = \max_{1\le j\le n} \lambda_j.$$

Bezeichne die Spalten von V mit $v_1, \dots, v_n$, so dass

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j v_j^\top$$

Aus der Parseval-Identität (Lineare Algebra) folgt, dass

$$\|x\|_A^2 = x^\top A x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x^\top v_j)(v_j^\top x) \ge \lambda_{\min} \sum_{j=1}^{n} (x^\top v_j)^2 = \lambda_{\min} \|x\|_2^2 .$$

Analog ist

$$\|x\|_A^2 = x^\top A x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x^\top v_j)(v_j^\top x) \le \lambda_{\max} \sum_{j=1}^{n} (x^\top v_j)^2 = \lambda_{\max} \|x\|_2^2 .$$

d.h. (1) gilt mit $c = \sqrt{\lambda_{\min}}$ und $C = \sqrt{\lambda_{\max}}$.

b)
Bezeichne die Einträge der Matrix A mit $a_{ij},\ 1 \le i,j \le n$. Wir können $f(x)$ wie folgt darstellen

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

d.h. f ist ein Polynom und als solches beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen nun die partiellen Ableitungen wie folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} x_i x_j a_{ij} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ik} x_j a_{ij} + \delta_{jk} x_i a_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{kj} + \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ (Ax)_k + (A^\top x)_k \right\} \\
&\Rightarrow \nabla f(x) = Ax,
\end{aligned}$$

wobei wir die Produktregel, die Definition der Marizenmultiplikation und $A = A^\top$ benutzt haben, und $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$ und 0 sonst, bezeichnet das Kronecker-Symbol. Analog berechnen wir die Einträge der Hesse-Matrix

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} x_j a_{kj} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} x_i a_{ik} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{jl} a_{kj} + \sum_{i=1}^{n} \delta_{il} a_{ik} \right) \\
&= \frac{1}{2} (a_{kl} + a_{lk}) = a_{kl},
\end{aligned}$$

wegen $A = A^\top$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist also

$$Hf(x) = A.$$

Entsprechend ist

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \text{spur}(A).$$

Aufgabe 2

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in D : \; \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto f(x) := a^\top x + b$, wobei $a \in \mathbb{R}^n, \; b \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist. (3 Punkte)

Lösung: Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung liefert

$$|f(x) - f(y)| = |a^\top x - a^\top y| = |a^\top (x - y)| \leq \|a\| \, \|x - y\| \, .$$

Wähle nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist für alle x, y mit

$$\|x - y\| < \delta, \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\|a\|}$$

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen M von $\mathbb{R}^2$ auf Offenheit und Abgeschlossenheit bzgl. der Euklidischen Norm. Bestimmen Sie ausserdem den Abschluss $\overline{M}$, das Innere $\overset{\circ}{M}$ und den Rand ∂M.

i) $M = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 | x \in [0, 1], \; x = y\}$, ii) $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \times \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$.

(4 Punkte)

Lösung: i) Geometrisch gesehen repräsentiert M die Winkelhalbierende durch den positiven Quadranten beschränkt auf das Einheitsintervall. M ist kompakt, also inbesondere abschlossen, d.h. $\overline{M} = M$. Das Innere $\overset{\circ}{M}$ ist leer, da für keinen Punkt in M eine ε-Kugel existiert, die ganz in M enthalten ist; insbesondere ist M also nicht offen. Ferner ist $\partial M = M$.
ii) Die Menge M repräsentiert die ein-elementige Menge, die nur den Ursprung $(0, 0)^\top$ enthält. Diese Menge ist abgeschlossen (und nicht offen), d.h. $M = \overline{M}$. Mit dem gleichen Argument wie in i) ist $\overset{\circ}{M} = \emptyset$. Weiter ist $\partial M = M = \{(0, 0)^\top\}$.

Aufgabe 4

Im Folgenden bezeichne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion und $D_v f(\xi) := \langle \nabla f(\xi), v \rangle$ die Richtungsableitung der Funktion f in ξ in Richtung des Vektors v, $\|v\| = 1$.

i) Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^3 \sin(y) + \exp(x) y^2$. Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung des Einheitsvektors $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top$ in $\xi = (0, 1)^\top$.

ii) Sei $\nabla f(\xi) \neq \mathbf{0}$. Zeigen Sie, dass die Richtung v^* des grössten Anstiegs von f im Punkt ξ, definiert durch

$$D_{v^*} f(\xi) = \sup_{v:\, \|v\| \leq 1} D_v f(\xi),$$

durch $v^* = \nabla f(\xi) / \|\nabla f(\xi)\|$ gegeben ist.

iii) Berechnen Sie die Richtung v^* des grössten Anstiegs von $f(x, y) = x^2 - y^2$ im Punkt $\xi = (1, 1)^\top$ und bestimmen Sie $D_{v^*} f(\xi)$. (2+2+2 Punkte)

Lösung: i) Anwendung von Regeln für die Differentiation einer Funktion in einer Variable liefert den Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \sin(y) + \exp(x) y^2 \\ x^3 \cos(y) + 2y \exp(x) \end{pmatrix}$$

Auswertung des Gradienten an $\xi = (0, 1)^\top$ liefert

$$\nabla f(\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definitonsgemäss ist

$$D_v f(\xi) = \langle \nabla f(\xi), v \rangle = (1, 2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

ii) Es ist

$$D_v f(\xi) = \langle \nabla f(\xi), v \rangle \leq \|\nabla f(\xi)\| \, \|v\| = \|\nabla f(\xi)\|,$$

nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und wg. $\|v\| = 1$. Die obere Schranke $\|\nabla f(\xi)\|$ wird für den Einheitsvektor

$$v^* = \frac{\nabla f(\xi)}{\|\nabla f(\xi)\|}$$

angenommen.

iii) Berechnung des Gradienten liefert

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

Auswertung an $\xi = (1, 1)^\top$ liefert

$$\nabla f(\xi) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gemäss Teil ii) ist

$$v^* = \frac{\nabla f(\xi)}{\|\nabla f(\xi)\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und weiter

$$D_{v^*}(\xi) = \|\nabla f(\xi)\| = 2\sqrt{2}.$$