Mathematik für Informatiker III
Universität des Saarlandes | Prof. Dr. Matthias Hein | Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Hausübungsblatt 11

Abgabe: Freitag, 3.2.2012, **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $\pi \in (0,1)$ Kopf zeigt. Sie beobachten n unabhängige Münzwürfe mit zugehörigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ ($X_i = 1 \;\Leftrightarrow\;$ Münze zeigt Kopf).

a) Betrachten Sie den Schätzer $\widehat{\pi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ für die Wahrscheinlichkeit π. Bestimmen Sie den mittleren quadratischen Fehler

$$\text{MSE}(\widehat{\pi}) = \mathbf{E}[(\widehat{\pi} - \pi)^2] = (\mathbf{E}[\widehat{\pi}] - \pi)^2 + V(\widehat{\pi}).$$

Skizzieren Sie $\text{MSE}(\widehat{\pi})$ in Abhängigkeit von π.

b) Zeigen Sie mittels der Chebyshev-Ungleichung, dass $\widehat{\pi}$ konsistent für π ist.

c) Betrachten Sie den Schätzer $\widehat{\sigma}^2 = \widehat{\pi}(1 - \widehat{\pi})$ für die Varianz $\sigma^2 = \pi(1-\pi)$. Zeigen Sie, dass $\widehat{\sigma}^2$ konsistent für σ^2 ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathbf{E}[(\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = O(n^{-1})$. Verwenden Sie dazu, dass

$$\mathbf{E}[(\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = \left\{\text{Bias}(\widehat{\sigma}^2)\right\}^2 + V(\widehat{\sigma}^2), \qquad \text{Bias}(\widehat{\sigma}^2) = \mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2] - \sigma^2,$$

und zeigen Sie, dass $\left\{\text{Bias}(\widehat{\sigma}^2)\right\} = O(n^{-1})$ und $V(\widehat{\sigma}^2) = O(n^{-1})$. Bei der Berechung von $V(\widehat{\sigma}^2)$ dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass

$$\mathbf{E}[\widehat{\pi}^4] = \pi^4 + O(n^{-1}), \quad \mathbf{E}[\widehat{\pi}^3] = \pi^3 + O(n^{-1}).$$

(3 + 2 + 5 Punkte)

Aufgabe 2

Ein Drehautomat fertigt Bolzen. Es ist bekannt, dass der Durchmesser der von dem Automaten gefertigten Bolzen (in mm) normalverteilt ist.

a) Es sei ferner bekannt, dass die Varianz σ^2 dieser Normalverteilung 0.25 beträgt. Man möchte ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Normalverteilung basierend auf einer Stichprobe von n gefertigten Bolzen konstruieren. Wie groß muss die Stichprobe mindestens sein, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Konfidenzintervall von der Form

$$[\text{Mittelwert der Stichprobe } - 0.1 \text{ mm}\,,\ \text{Mittelwert der Stichprobe } + 0.1 \text{ mm}\,]$$

den Erwartungswert μ mit Wahrscheinlichkeit mindestens 0.99 enthält ?

b) Sie erhalten eine Stichprobe von $n = 100$ Bolzen mit mittlerer Länge $\bar{x} = 54,87$ mm. Berechnen Sie anhand dieser Daten ein 99%-Konfidenzintervall für μ.

c) Gegeben sei die Stichprobe in b). Betrachten Sie das Hypothesenpaar

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 55, \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Führen Sie hierzu einen zweiseitigen statistischen Test auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ durch.

d) Im Unterschied zu a)-c) nehmen wir nun an, dass die Varianz σ^2 ebenfalls unbekannt ist. Wir schätzen σ^2 durch die Stichprobenvarianz, für die wir 0.33 erhalten. Beantworten Sie die Fragestellungen aus b) und c) erneut unter der Annahme unbekannter Varianz.

Hinweis: Verwenden Sie $z_{0.995} = 2.58$ und $t_{99,0.995} = 2.63$ als die 0.995-Quantile der $N(0,1)$-Verteilung und der t-Verteilung mit 99 Freiheitsgraden.
(2 + 2 + 2 + 4 Punkte)