Mathematatik für Informatiker III

Universität des Saarlandes   Prof. Dr. Matthias Hein   Übungen: Martin Slawski

Wintersemester 2011/12

Hausübungsblatt 11

Abgabe:

Aufgabe 1

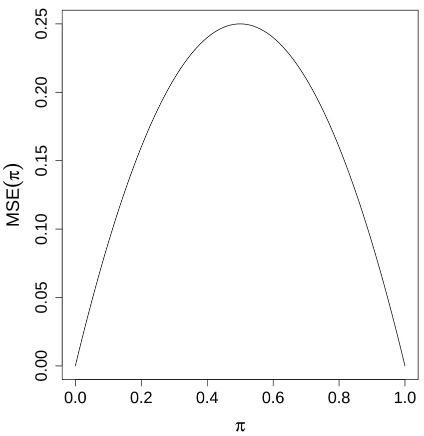
Lösung : a) Wir berechnen zunächst $\mathbf{E}[\widehat{\pi}]$ und erhalten, dass

$$\mathbf{E}[\widehat{\pi}] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbf{E}[X_1] = \pi.$$

Da $\mathbf{E}[\widehat{\pi}] = \pi$, folgt, dass

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\pi}) = V(\widehat{\pi}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot V(X_1) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}.$$

Der quadratische Fehler $\mathrm{MSE}(\widehat{\pi})$ ist eine quadratische Funktion von π, deren Maximum für $\pi = \frac{1}{2}$ erreicht wird (vgl. Abbildung). Ist die zugrundeliegende Wahrscheinlickeit also $\frac{1}{2}$, so ist der quadratische Fehler des Schätzers maximal.



b) Es ist zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$P(|\widehat{\pi} - \pi| > \varepsilon) \to 0 \ \text{ für } n \to \infty.$$

Nun ist $\mathbf{E}[\widehat{\pi}] = \pi$. Aus der Chebychev-Ungleichung folgt somit

$$\begin{aligned} P(|\widehat{\pi} - \pi| > \varepsilon) &= P(|\widehat{\pi} - \mathbf{E}[\widehat{\pi}]| > \varepsilon) \\ &\leq \frac{V(\widehat{\pi})}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi(1-\pi)}{\varepsilon^2} \to 0. \end{aligned}$$

c) Wie in b) argumentieren wir mittels der Chebychev-Ungleichung. Jedoch ist $\mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2] \neq \sigma^2$, was eine kleine Modifikation benötigt.

$$\begin{aligned} P(|\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2| > \varepsilon) &= P(|\widehat{\sigma}^2 - \mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2] + \mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2] - \sigma^2| > \varepsilon) \\ &\leq P\left(|\widehat{\sigma}^2 - \mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2]| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|\,\mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2] - \sigma^2| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\leq \frac{V(\widehat{\sigma}^2)}{\frac{\varepsilon^2}{4}} + P\left((\mathrm{Bias}(\widehat{\sigma}^2))^2 > \frac{\varepsilon^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass $V(\widehat{\sigma}^2) \to 0$ und $(\text{Bias}(\widehat{\sigma}^2))^2 \to 0$.
Wir berechnen zunächst $\mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2]$.

$$\mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2] = \mathbf{E}[\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi})] = \pi - \mathbf{E}[\widehat{\pi}^2]$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\widehat{\pi}^2] &= \mathbf{E}\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[X_i^2\right] + \sum_{i\neq j}\mathbf{E}[X_iX_j]\right) \\
&= \frac{1}{n}\,\mathbf{E}[X_1^2] + 2\cdot\binom{n}{2}\,\mathbf{E}[X_1X_2] \\
&= \frac{1}{n}\,\mathbf{E}[X_1^2] + \frac{n(n-1)}{n^2}\,\mathbf{E}[X_1X_2] \\
&= \frac{1}{n}\pi - \frac{1}{n}\pi^2 + \pi^2 = O(n^{-1}) + \pi^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2] = \pi - \pi^2 + O(n^{-1}) = \pi(1-\pi) + O(n^{-1}) = \sigma^2 + O(n^{-1}),$$

d.h. $\left(\mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2] - \sigma^2\right)^2 \to 0$. Wir betrachten nun $V(\widehat{\sigma}^2)$.

$$\begin{aligned}
V(\widehat{\sigma}^2) &= \mathbf{E}[\widehat{\sigma}^4] - \mathbf{E}[\widehat{\sigma}^2]^2 \\
&= \mathbf{E}[(\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi}))^2] - (\sigma^2)^2 + O(n^{-1}) \\
&= \mathbf{E}[(\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi}))^2] - (\pi(1-\pi))^2 + O(n^{-1}) \\
&= \mathbf{E}[(\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi}))^2] - (\pi^2(1-2\pi+\pi^2)) + O(n^{-1}) \\
&= \mathbf{E}[\widehat{\pi}^2] + \mathbf{E}[\widehat{\pi}^4] - 2\,\mathbf{E}[\widehat{\pi}^3] - (\pi^2(1-2\pi+\pi^2)) + O(n^{-1}) \\
&= \pi^2 + O(n^{-1}) + \pi^4 + O(n^{-1}) - 2\pi^3 + O(n^{-1}) - (\pi^2(1-2\pi+\pi^2)) + O(n^{-1}) = O(n^{-1}),
\end{aligned}$$

d.h. also auch $V(\widehat{\sigma}^2) \to 0$, und $\widehat{\sigma}^2$ ist konsistent für σ^2.

Aufgabe 2

Lösung :

a) Aufgrund der gemachten Annahmen bzgl. der Verteilung der interessierenden Größe konstruieren wir ein 99%-Konfidenzintervall von der Form

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.995},\ \ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.995}\right], \tag{1}$$

wobei $z_{0.995}$ das 0.995-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung bzw. $\bar{x}$ das Stichprobenmittel bezeichnen. Nun soll n so gewählt werden, dass

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.995} = 0.1$$

gilt. Auflösen nach n liefert

$$n = \lceil \sigma^2 z_{0.995}^2/(0.1)^2 \rceil = \lceil 0.25 \cdot 2.58^2/(0.1)^2 \rceil = 167.$$

b) Das Konfidenzintervall erhalten wir, indem wir die gegebenen Werte in (1) einsetzen. Wir erhalten

$$\left[54.87 - \frac{\sqrt{0.25}}{\sqrt{100}}\cdot 2.58\ ,\ 54.87 + \frac{\sqrt{0.25}}{\sqrt{100}}\cdot 2.58\right] = [54.741\ ,\ 54.999]\,.$$

c) Wir führen einen zweiseitigen Gauß-Test durch, dessen Teststatistik folgende Form hat

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}. \tag{2}$$

Einsetzen der gegebenen Werte liefert

$$T = \frac{54.87 - 55}{\frac{\sqrt{0.25}}{\sqrt{100}}} = -2.6.$$

Da $|T| > z_{0.995} = -2.58$, kann die Nullhypothese zum Signifikanzniveau 0.01 verworfen werden.
d) Wenn die Varianz unbekannt ist und man von σ^2 zur Stichprobenvarianz $\widehat{\sigma}^2$ übergeht, so ist die Größe

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$$

nunmehr t-verteilt. Demgemäß müssen wir in b) bzw. c) Quantile der Standardnormalverteilung durch Quantile der t_{n-1}-Verteilung (t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden) ersetzen. Das Konfidenzintervall bzw. Teststatistik sind dann von der Form

$$\left[\bar{x} - \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-1,0.995},\ \ \bar{x} + \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-1,0.995}\right],$$

und

$$T_{\widehat{\sigma}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}},$$

und $|T_{\widehat{\sigma}}|$ ist mit einem Quantil der t_{n-1}-Verteilung zu vergleichen.
Durch Einsetzen angegebener Werte erhalten wir für das Konfidenzintervall

$$\left[54.87 - \frac{\sqrt{0.33}}{\sqrt{100}} \cdot 2.63\ ,\ 54.87 + \frac{\sqrt{0.33}}{\sqrt{100}} \cdot 2.63\right] = [54.718\ ,\ 55.022]$$

sowie für die Teststatistik

$$T_{\widehat{\sigma}} = \frac{54.87 - 55}{\frac{\sqrt{0.33}}{\sqrt{100}}} = -2.263.$$

Da $|T_{\widehat{\sigma}}| \leq t_{99,0.995} = 2.63$, kann die Nullhypothese nun *nicht mehr* verworfen werden.