Mathematik für Informatiker III

Universität des Saarlandes — Prof. Dr. Matthias Hein — Übungen: Martin Slawski

Wintersemester 2011/12

Hausübungsblatt 10

Abgabe: Freitag, 20.01.2012, **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 1

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2.

a) Zeigen Sie, dass die momentenerzeugende Funktion $M_X(\theta) = \mathbf{E}[\exp(\theta X)]$ gegeben ist als $M_X(\theta) = \exp(\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2)$.
Hinweis: Verwenden Sie eine quadratische Ergänzung, um das auftretende Integral auf ein Gauss-Integral zurückzuführen.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhänigig identisch verteilt wie X und sei $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Bestimmen Sie die momentenerzeugende Funktion $M_Y(\theta) = \mathbf{E}[\exp(\theta Y)]$ unter Verwendung des Resultats aus a).

c) Zeigen Sie, dass die Chernov-Schranke für Y gegeben ist durch

$$P(Y \geq t) \leq \inf_{\theta \geq 0} (\exp(-\theta t) M_Y(\theta)) = \exp\left(-\frac{t^2 n}{2\sigma^2}\right), \quad t \geq 0.$$

Hinweis: Minimieren Sie die rechte Seite der Ungleichung bezüglich θ und setzen Sie die Minimalstelle ein.

d) Betrachten Sie die Chernov-Schranke aus c). Man nehme an, die $\{X_i\}_{i=1}^n$ beschreiben Messungen einer bestimmten Größe. Wie viele Messungen n muss man mindestens beobachten, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert Y dieser Messungen größer oder gleich σ ist, nicht mehr als 0.01 beträgt ?
Hinweis: Lösen Sie das Resultat aus c) nach n auf.
(3 + 2 + 3 + 2 Punkte)

Aufgabe 2

Aus jahrelanger Erfahrung weiß ein Flugunternehmen, dass im Mittel 7% der Personen, die ein Flugticket gekauft haben, nicht bzw. zu spät zum Abflug erscheinen. Um die Zahl der somit ungenutzen Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen Flug, bei dem 240 Plätze zur Verfügung stehen, mehr als 240 Tickets verkauft.

Wie viele Flugtickets dürfen höchstens verkauft werden, dass mit Wahrscheinlichkeit mindestens 0.99 alle zum Abflug erscheinenden Personen, die ein Flugticket haben, auch einen Platz im Flugzeug bekommen ?

Zur Modellierung betrachte man unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, wobei $X_i = 1$ genau dann gelte, wenn die Person, die das i-te Ticket gekauft hat, tatsächlich mitfliegt. n ist hierbei die Anzahl der verkauften Tickets und $P(X_i = 1) = p = 1 - 0.07$.

Approximieren Sie zur Beantwortung obiger Frage die Verteilung von $\sum_{i=1}^n X_i$ durch die Normalverteilung mit Erwartungswert $\mathbf{E}[\sum_{i=1}^n X_i]$ und Varianz $V(\sum_{i=1}^n X_i)$.

Verwenden Sie, dass $P(Z \leq 2.33) \geq 0.99$, wobei Z eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable ist. (6 Punkte)

Aufgabe 3

a) Seien X und Y unbhängig identisch normalverteilte Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$ und $V(X) = V(Y) = 1$. Zeigen, Sie dass $Z = X + Y$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz 2.

b) Seien $\sigma_X, \sigma_Y \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass $W = \sigma_X X + \sigma_Y Y$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

c) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Zeigen Sie per Induktion unter Verwendung des Resultats aus b), dass

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

d) Setzen Sie das Resultat aus c) zum zentralen Grenzwertsatz in Beziehung.

Hinweise: Die Dichtefunktion f_Z der Summe $X + Y$ zweier unabhängiger Zufallsvariablen ist gegeben durch den Ausdruck

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\, dx.$$

Benutzen Sie eine quadratische Ergänzung, um das so in a) auftretende Integral zu lösen. Gehen Sie analog vor, um das allgemeinere Resultat in b) zu zeigen.
(3 + 2 + 2 + 1 Punkte)