Hausübungsblatt 10

Abgabe: Freitag, 20.01.2012, **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 1

Lösung :
a)

$$
\begin{aligned}
M_X(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\theta x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \, dx \\
&= \exp(\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2) \exp(\theta x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \, dx \\
&= \exp(\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta^2\sigma^2 - 2\theta x + \frac{x^2}{2\sigma^2})\right) \, dx \\
&= \exp(\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\theta\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \, dx \\
&= \exp(\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2).
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
M_Y(\theta) = \mathbf{E}[\exp(\theta Y)] &= \mathbf{E}\left[\exp\left(\theta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^n \exp\left(\theta \frac{1}{n} X_i\right)\right] \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\exp\left(\theta \frac{1}{n} X_i\right)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\exp\left(\theta \frac{1}{n} X_1\right)\right]^n \\
&= \left(M_{\frac{1}{n}X_1}(\theta)\right)^n \\
&= \exp\left(\frac{\sigma^2}{2n^2}\theta^2\right)^n \\
&= \exp\left(\frac{\sigma^2}{2n}\theta^2\right).
\end{aligned}
$$

c) Minimierung von

$$
\exp(-\theta t) M_Y(\theta) = \exp\left(-\theta t + \frac{\sigma^2}{2n}\theta^2\right)
$$

bzgl. θ erreicht man durch Minimierung des Exponenten

$$
-\theta t + \frac{\sigma^2}{2n}\theta^2.
$$

Dies liefert das Minimum

$$
\theta^* = \frac{n\,t}{\sigma^2},
$$

so dass

$$-\theta^* t + \frac{\sigma^2}{2n}(\theta^*)^2 = -n\frac{t^2}{\sigma^2} + \frac{n^2 t^2 \sigma^2}{2\sigma^4 n} = -\frac{nt^2}{2\sigma^2}.$$

d) Gesucht ist ein $\bar{n}$, so dass

$$\exp\left(-\frac{t^2\bar{n}}{2\sigma^2}\right) \leq 0.01,$$

wobei wir $t = \sigma$ setzen. Dies liefert

$$\exp\left(-\frac{\bar{n}}{2}\right) \leq 0.01$$

und somit

$$\bar{n} \geq 2 \cdot (-\log(0.01)) = 2\log(100) \approx 9.21034,$$

d.h. man benötigt mindestens 10 Messungen.

Aufgabe 2

Lösung :

Gesucht ist n, so dass

$$P\left(S_n \leq 240\right) \geq 0.99, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Es ist $\mathbf{E}[S_n] = n \cdot p$ und $V(S_n) = n \cdot p \cdot (1-p)$.
Unter Verwendung der Normalverteilungsapproximation berechnet man

$$P\left(S_n \leq 240\right) = P\left(\frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} \leq \frac{240 - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{240 - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}}\right),$$

wobei $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ die Verteilungsfunktion einer $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariable Z bezeichnet. Unter Verwendung von $P(Z \leq 2.33) \geq 0.99$ ist also nun n zu bestimmen, so dass

$$\frac{240 - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} \geq 2.33.$$

Einsetzen von $\mathbf{E}[S_n] = n \cdot p$ und $V(S_n) = n \cdot p \cdot (1-p)$ und anschliessendes Quadrieren liefert folgende quadratische Gleichung in n

$$p^2 n^2 - (480 + 2.33^2 \cdot (1-p)) \cdot n \cdot p + 240^2 = 0.$$

Wir setzen $p = 0.93$ ein und erhalten die beiden Lösungen

$$\underline{n} = 247.9978, \quad \overline{n} = 268.5398.$$

Jedoch kann $\overline{n}$ nicht die gewünschte Lösung sein, da

$$\mathbf{E}[S_{\overline{n}}] = 268.5398 \cdot p = 268.5398 \cdot 0.93 > 240.$$

Als Ergebnis erhalten wir also, dass nicht mehr als 247 Tickets verkauft werden dürfen.

Aufgabe 3

Lösung :
a)

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2}\right)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{z^2}{4}\right)\, \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2}\right)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{2x^2 + z^2 - 2xz - \frac{1}{2}z^2}{2}\right)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2}{2}\right)\, dx
\end{aligned}$$

Die Substitution $\xi = \sqrt{2}x$, $dx = d\xi/\sqrt{2}$ liefert

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2}{2}\right)\, d\xi \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

Den letzten Ausdruck identifiziert man als Dichte einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz 2.

b) Der allgemeine Fall wird in ähnlicher Weise gezeigt wie der Spezialfall a): quadratische Ergänzung und Zurückführen auf ein Gauss-Integral. Lediglich die Rechnung ist leicht komplizierter.

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(w-x)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) \exp\left(-\frac{(w-x)^2}{2\sigma_Y^2}\right)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) \exp\left(-\frac{(w-x)^2}{2\sigma_Y^2}\right)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left(-\frac{w^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{w^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) \exp\left(-\frac{(w-x)^2}{2\sigma_Y^2}\right)\, dx.
\end{aligned}$$

Wir fassen nun die Terme im Exponenten zusammen:

$$\begin{aligned}
& -\frac{w^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)} + \frac{x^2}{2\sigma_X^2} + \frac{w^2 + x^2 - 2xw}{2\sigma_Y^2} \\
&= \frac{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)x^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2} + \frac{w^2\sigma_X^2}{2\sigma_Y^2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)} - \frac{2xw}{2\sigma_Y^2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}}\,x - \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}\,w\right)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in den Exponenten und Verwendung der Substitution

$$\xi = \sqrt{\frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}\,x, \quad dx = \sqrt{\frac{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}\,d\xi$$

liefert schließlich

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}} \exp\left(-\frac{w^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}\right),$$

was dem zu zeigenden Ergebnis entspricht.
c) Wir zeigen, zunächst per Induktion, dass $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $n\sigma^2$. Für $n = 1$ trifft die Aussage zu, da die zentrierte Zufallsvariable $X_1 - \mu$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und σ^2. Für den Induktionsschritt benutzen wir das Resultat aus b). Gemäß Induktionsvoraussetzung ist $S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mu)$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $(n-1)\sigma^2$, so dass gemäß b) $S_{n-1} + (X_n - \mu)$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $n\sigma^2$. Das angegebene Resultat folgt unmittelbar durch Reskalierung.
d) Der zentrale Grenzwertsatz sagt aus, dass für unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

für n 'groß' approximativ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Sind die $\{X_i\}_{i=1}^n$ bereits normalverteilt, so gilt dies nicht nur approximativ, sondern exakt (und auch für kleines n).