Mathematik für Informatiker III

Universität des Saarlandes — Prof. Dr. Matthias Hein — Übungen: Martin Slawski
Wintersemester 2011/12

Hausübungsblatt 1

Abgabe: Freitag, 28.10.2011, **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 1

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Gegeben sei eine Kurve mit Parameterisierung

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (a\cos t, a\sin t, bt) \end{array}$$

Parameterisieren Sie f nach der Bogenlänge.
(6 Punkte)

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

1. $U_i \subset \mathbb{R}^n,\ i \in I$ eine Familie von offenen Mengen. $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i$ offen.
2. $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ offen.
3. $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind offen.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $n \geq 2$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\|x\|^{2n}} & x \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass f in jedem $x \in \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar nach x_i $\forall i = 1, \ldots, n$ ist und verifizieren Sie, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{\prod_{j\neq i} x_j}{\|x\|^{2n}} - \frac{2nx_i^2 \prod_{j\neq i} x_j}{\|x\|^{2n+2}} & x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bonusaufgabe: Zeigen Sie, dass f im Ursprung **nicht** stetig ist. **Hinweis**: Betrachten Sie die Folge $\{x^{(k)} = (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k})\}$ und benutzen Sie das Folgenkriterium.
(8 Punkte + 4 Bonuspunkte)