Musterlösungen zum Hausübungsblatt 1

Aufgabe 1

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Gegeben sei eine Kurve mit Parameterisierung

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (a\cos t, a\sin t, bt) \end{array}$$

Parameterisieren Sie f nach der Bogenlänge.

Lösung: Man berechnet

$$\|f'(t)\| = \|(-a\sin t, a\cos t, b)\| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Somit erhalten wir die Bogenlängefunktion

$$\lambda(u) = \int_0^u \|f'(t)\| \; dt = \sqrt{a^2+b^2}u,$$

deren Umkehrfunktion durch

$$\psi(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

gegeben ist. Die Parameterisierung nach der Bogenlänge erhält man über

$$g(s) = (f \circ \psi)(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

1. $U_i \subset \mathbb{R}^n,\ i \in I$ eine Familie von offenen Mengen. $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i$ offen.
2. $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ offen.
3. $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind offen.

Lösung: 1. Sei $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, d.h. es existiert ein i^* so dass $x \in U_{i^*}$. Da U_{i^*} offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass für die offene Kugel $B_\epsilon(x) = \{y : \|x-y\| < \epsilon\}$ gilt, dass

$$B_\epsilon(x) \subset U_{i^*} \subset \bigcup_{i\in I} U_i,$$

d.h. $\bigcup_{i\in I} U_i$ ist offen.
2. Sei $x \in U_1 \cap U_2$. Da U_1, U_2 offen sind, existieren offene Kugeln $B_{\epsilon_1}(x)$ und $B_{\epsilon_2}(x)$ mit $B_{\epsilon_1}(x) \subset U_1$ und $B_{\epsilon_2}(x) \subset U_2$, $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$. Setze $\delta := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Dann ist $B_\delta(x) \subset U_1 \cap U_2$, d.h. $U_1 \cap U_2$ ist offen.
3. Klarerweise ist $\mathbb{R}^n$ offen, da für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\epsilon > 0$ $B_\epsilon(x) \subset \mathbb{R}^n$. Trivialerweise ist auch $\emptyset$ offen, da die leere Menge keine Elemente enthält und daher die Definition von Offenheit nicht verletzt wird.

Aufgabe 3

Sei $n \geq 2$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\|x\|^{2n}} & x \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f in jedem $x \in \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar nach x_i $\forall i = 1, \ldots, n$ ist und verifizieren Sie, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{\prod_{j \neq i} x_j}{\|x\|^{2n}} - \frac{2n x_i^2 \prod_{j \neq i} x_j}{\|x\|^{2n+2}} & x \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bonusaufgabe: Zeigen Sie, dass f im Ursprung **nicht** stetig ist. **Hinweis**: Betrachten Sie die Folge $\{x^{(k)} = (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k})\}$ und benutzen Sie das Folgenkriterium.

Lösung: Man kann f schreiben als

$$f(x) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^n}.$$

Für $i = 1, \ldots, n$, definiere Funktionen

$$g_i(x_i) = x_i \prod_{j \neq i} x_j, \quad h_i(x_i) = \left(x_i^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2\right)^n, \quad f_i(x_i) = \frac{g_i(x_i)}{h_i(x_i)}.$$

Nach der Quotientenregel ist f_i in jedem Punkt differenzierbar unter der Voraussetzung, dass $x \neq \mathbf{0}$. Es folgt, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \ x \neq \mathbf{0}$ existieren. Sie sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{h_i(x_i) g_i'(x_i) - h_i'(x_i) g_i(x_i)}{h_i^2(x_i)} \\ &= \frac{\|x\|^{2n} \prod_{j \neq i} x_j - 2x_i^2 \cdot n \, \|x\|^{2(n-1)} \prod_{j \neq i} x_j}{\|x\|^{4n}} \\ &= \frac{\prod_{j \neq i} x_j}{\|x\|^{2n}} - \frac{2n x_i^2 \prod_{j \neq i} x_j}{\|x\|^{2n+2}}. \end{aligned}$$

nach Anwendung der Quotientenregel und Kettenregel. Betrachte nun den Fall $x = \mathbf{0}$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ betrachte man den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{0} + h e_i) - f(\mathbf{0})}{h} = 0, \quad e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{te Komponente}}, 0, \ldots, 0)^\top,$$

da

$$f(\mathbf{0} + h e_i) = \frac{1 \cdot \prod_{j \neq i} (e_i)_j}{h^{2n}} = 0.$$

Bonusaufgabe: Wir betrachten die Folge $\{x^{(k)} = (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k})^\top\}$. Dann ist $\left\|x^{(k)}\right\|^2 = \frac{n}{k^2}$ und damit

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n k^{2n}}{n^n} = \lim_{k \to \infty} \frac{k^n}{n^n} = +\infty.$$

Wir haben also eine Folge $x^{(k)} \to \mathbf{0}$ gefunden, für die $f(x^{(k)}) \nrightarrow f(\mathbf{0}) = 0$. Somit ist ist f im Ursprung nicht stetig.