Mathematik für Informatiker II

Universität des Saarlandes — Matthias Hein
Sommersemester 2011 — Christoph Eisinger

Probeklausur

Es ist keine Abgabe erforderlich. Die Probeklausur wird in den Übungen vom 18. bis 22. Juli 2011 vorgerechnet.
Dieses Aufgabenblatt ist im Umfang einer dreistündigen Klausur angeglichen. Numerische Berechnungen sind per Hand auszuführen.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben seien die Polynome $f, g, h \in K[x]$. Zeigen Sie, dass es genau dann Polynome h_1 und h_2 mit $h_1 f + h_2 g = h$ gibt, wenn $\mathrm{ggT}(f, g)$ ein Teiler von h ist. Wie berechnet man h_1 und h_2?

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \oplus y := x + y - xy$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \oplus)$ eine kommutative Gruppe ist.

b) Sei die Teilmenge $\mathbb{Q}[\sqrt(2)] := \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ von $\mathbb{R}$ gegeben, zusammen mit den üblichen Operationen $+, \cdot$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus zur Bestimmung des Ranges von A.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Führen Sie dabei mit Hilfe geeigneter Umformungen und des Laplaceschen Entwicklungssatzes die Berechnung der Determinante der (4×4)-Matrix A auf die Berechnung der Determinante einer (3×3)-Matrix zurück.

Aufgabe 5 (4+4+4 Punkte)

a) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi_1(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(A) = \mathrm{Spur}(A)$ ist eine lineare Abbildung.

b) Sei $\varphi_2 : V \to W$ bijektive lineare Abbildung, d.h. isomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch φ_2^{-1} linear ist.

c) Sei $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare Abbildung mit $\varphi_3(x, y) := (x-y, y-x, x)$. Bestimmen Sie jeweils die Dimensionen von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$, sowie jeweils eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegegen sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie das euklidische Produkt $\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ mit $u, v \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass $\langle A^\top y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ gilt.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktion $g(x) = x^2$ auf $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 8 (4+4 Punkte)

Gegeben sei V der Vektorraum der $n\times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(B^\top A)$ (dabei sind $A, B \in V$) , und (siehe Aufgabe 5) $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

- Zeigen Sie, dass $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen Prä-Hilbert-Raum bildet.
- Bestimmen Sie für $n = 2$ eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Multiple Choice: In dieser Aufgabe werden 5 Aussagen gestellt, die entweder richtig oder falsch sind. Sie erhalten für die korrekte Feststellung, ob eine Aussage richtig oder falsch ist, jeweils einen Punkt und jeweils einen zusätzlichen Punkt, falls Sie ihre Entscheidung korrekt begründen können.

a) Die Menge der symmetrischen Matrizen ist eine multiplikative Untergruppe der $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

b) Beschreibt man eine beliebige Funktion f mittels einer Fourierreihendarstellung, dann wird f besser approximiert, je mehr Fourierkoeffizienten in der Fourierreihe verwendet werden.

c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

d) Sind die Eigenwerte einer Matrix nicht alle paarweise verschieden, dann ist die Matrix nicht diagonalisierbar.