Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Beispiellösungen zur Probeklausur

Aufgabe 1

Gegeben sind die Polynome $f, g, h \in K[x]$. Zu zeigen: Es gibt genau dann Polynome h_1 und h_2 mit $h_1 f + h_2 g = h$ gibt, wenn $\mathrm{ggT}(f, g)$ ein Teiler von h ist.

Lösung:

Sei $s = \mathrm{ggT}(f, g)$.

„$'' \Longrightarrow ''$:

Seien h_1, h_2 Polynome mit $h_1 f + h_2 g = h$. Da $s|f$ und $s|g$ gilt, gibt es r_1 und r_2 mit $sr_1 = f$ und $sr_2 = g$. Setzt man dies in die Gleichung ein, so erhält man $s(h_1 r_1 + h_2 r_2) = h$, also teilt s das Polynom h.

$'' \Longleftarrow''$:

Sei nun s ein Teiler von h, d.h. es gibt ein Polynom r mit $sr = h$. Dann gibt es Polynome p_1, p_2 mit $p_1 f + p_2 g = s$ (siehe $\Longleftarrow$) Dann ist $p_1 r f + p_2 r g = h$, also erfüllen $h_1 := p_1 r$ und $h_2 := p_2 r$ die Forderung.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

1. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \oplus y := x + y - xy$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \oplus)$ eine kommutative Gruppe ist.
2. Sei die Teilmenge $\mathbb{Q}[\sqrt(2)] := \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ von $\mathbb{R}$ gegeben, zusammen mit den üblichen Operationen $+, \cdot$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ein Körper ist.

1. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \oplus y := x + y - x * y$.

   Zu zeigen: $(\mathbb{R} - \{1\}, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe.

   Also:

   (a) $\oplus$ ist wohldefiniert auf $\mathbb{R} - \{1\}$
   (b) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}$ gilt: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
   (c) $\exists e \in \mathbb{R} - \{1\} : \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : e \oplus x = x = x \oplus e$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \exists x^{-1}$ mit $x^{-1} \oplus x = e$

(e) $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\} : x \oplus y = y \oplus x$

Lösung:

(a) Wir wissen, dass die Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$ wohldefiniert sind. Das einzige, was es zu überprüfen gilt ist, ob $x \oplus y$ nicht auf 1 abgebildet werden kann. Dazu betrachte folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & x \oplus y = x + y - xy = 1 \\ \iff \quad & x(1-y) + y = 1 \\ \iff \quad & x = \frac{1-y}{1-y} = 1 \end{aligned}$$

Das bedeutet $x \oplus y$ wird immer auf $\mathbb{R} - \{1\}$ abgebildet.

(b) Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus z &= (x + y - xy) \oplus z \\ &= (x + y - xy) + z - (xz + yz - xyz) \\ &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz \\ x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (y + z - yz) \\ &= x + y + z - yz - (xy + xz - xyz) \\ &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz \end{aligned}$$

(c) Neutrales Element:

$$\begin{aligned} x \oplus 0 = x + 0 - x \cdot 0 = x \\ 0 \oplus x = 0 + x - 0 \cdot x = x \end{aligned}$$

(d) Inverses Element:

$$\begin{aligned} & x + y - xy = 0 \\ \iff \quad & y = -\tfrac{x}{1-x} = \tfrac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Probe:

$$x \oplus \frac{x}{x-1} = x + \frac{x}{x-1} - x \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x^2 - x + x - x^2}{x-1} = 0$$

(e) Kommutativität:

$$x \oplus y = x + y - xy = y + x - yx = y \oplus x$$

Damit sind alle Voraussetzungen für eine abelsche Gruppe erfüllt.

2. Zu zeigen: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ bildet mit $+$ und $\cdot$ einen Körper. Also:

   (a) $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert über $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

   (b) $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +)$ ist kommutative Gruppe

   (c) $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \cdot)$ ist Halbgruppe

(d) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$
$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

(e) $\forall a \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\ \exists a^{-1}$ mit $a^{-1} \cdot a = 1$.

Lösung:

(a) Die Wohldefiniertheit gilt wegen:

$$a+b = (x_1+\sqrt{2}y_1)+(x_2+\sqrt{2}y_2) = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in\mathbb{Q}}+\sqrt{2}\underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

$$a\cdot b = (x_1+\sqrt{2}y_1)\cdot(x_2+\sqrt{2}y_2) = \underbrace{(x_1 \cdot x_2 + 2y_1y_2)}_{\in\mathbb{Q}}+\sqrt{2}\underbrace{(x_2y_1 + x_1y_2)}_{\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

(b) Klar, wie in $\mathbb{R}$. Neutrales Element: $(0 + 0 \cdot \sqrt{2})$

(c) Klar, wie in $\mathbb{R}$. Einselement:$(1 + 0 \cdot \sqrt{2})$

(d) Distributivgesetze:

$$(x_1 + y_1\sqrt{2}) \cdot ((x_2 + y_2\sqrt{2}) + (x_3 + y_3\sqrt{2}))$$

$$\begin{aligned} &= x_1(x_2 + x_3) + \sqrt{2}x_1(y_2 + y_3) + \sqrt{2}y_1(x_2 + x_3) + 2y_1(y_2 + y_3) \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + \sqrt{2}(x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1) \end{aligned}$$

$$(x_1 + y_1\sqrt{2})(x_2 + y_2\sqrt{2}) + (x_1 + y_1\sqrt{2})(x_3 + y_3\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} &= x_1x_2 + 2y_1y_2 + \sqrt{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + x_1x_3 + 2y_1y_3 + \sqrt{2}(x_3y_1 + x_1y_3) \\ &= x_1x_2 + 2y_1y_2 + x_1x_3 + 2y_1y_3 + \sqrt{2}(x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_1 + x_1y_3) \end{aligned}$$

Damit ist das erste Distributivgesetz gezeigt. Das zweite ergibt sich, da die Multiplikation kommutativ ist

(e) Inverses:

$$\begin{aligned} a^{-1}a &= (x' + y'\sqrt{2})(x + \sqrt{2}y) = 1 + 0\sqrt{2} \\ &\iff x'x + \sqrt{2}x'y + \sqrt{2}xy' + 2y'y = 1 \\ &\iff x'x + 2y'y = 1 \wedge x'y + xy' = 0 \end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem (durch Einsetzen, Gleichsetzen) erhält man für das Inverse

$$a^{-1} = (x + \sqrt{2}y)^{-1} = \frac{y}{x^2 + 2y^2} - \sqrt{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 2y^2}$$

Damit ist $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ mit $+$ und $\cdot$ ein Körper.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus zur Bestimmung des Ranges von A.

Lösung: Wir berechnen den Rang von A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -8 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich: $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Anmerkung: Die Zwischenschritte werden hier nicht alle aufgeführt, dürfen allerdings bei ausführlichen Lösungen nicht fehlen.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Führen Sie dabei mit Hilfe geeigneter Umformungen und des Laplaceschen Entwicklungssatzes die Berechnung der Determinante der (4×4)-Matrix A auf die Berechnung der Determinante einer (3×3)-Matrix zurück.

Lösung: Zu berechnen ist die Determinante der Matrix

$$A = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Wir formen die Matrix leicht auf „obere Dreiecksgestalt“ um:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -3
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt wird nach erster Spalte entwickelt (muss man im Grunde nicht).

Aufgabe 5 (4+4+4 Punkte)

1. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei $\text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi_1(A) : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(A) = \text{Spur}(A)$ ist eine lineare Abbildung.
2. Sei $\varphi_2 : V \to W$ bijektive lineare Abbildung, d.h. isomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch φ_2^{-1} linear ist.
3. Sei $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare Abbildung mit $\varphi_3(x, y) := (x - y, y - x, x)$. Bestimmen Sie jeweils die Dimensionen von $\text{Kern}(\varphi)$ und $\text{Bild}(\varphi)$, sowie jeweils eine Basis von $\text{Kern}(\varphi)$ und $\text{Bild}(\varphi)$.

Lösung:

1. *Zu zeigen*: Die Abbildung $\varphi_1(A) = \text{Spur}(A)$ ist eine lineare Abbildung.

   Beweis:
   Es sei $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$. Dann ist $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, und man erhält:

   $$\text{Spur}(A + B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \text{Spur}A + \text{Spur}B$$

   $$\text{Spur}(cA) = \sum_{i=1}^{n} c a_{ii} = c \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = c\text{Spur}A$$

   Damit gelten für φ_1 die Eigenschaften einer linearen Abbildung.

2. *Zu zeigen*: Ist $\varphi_2 : V \to W$ eine isomorphe Abbildung, so ist auch φ_2^{-1} linear.

Beweis:
Es seien $u, v \in W$. Da φ_2 bijektiv (also insbesondere surjektiv) ist, gibt es $x, y \in V$ mit $\varphi_2(x) = u$ und $\varphi_2(y) = v$. Da φ_2 linear ist, gilt außerdem

$$\varphi_2(x + y) = \varphi_2(x) + \varphi_2(y) = u + v$$
und
$$\varphi_2(\alpha x) = \alpha\varphi_2(x) = \alpha u.$$

Nach Definition von φ_2^{-1} gild $\varphi_2^{-1}(u) = x$, $\varphi_2^{-1}(v) = y$, $\varphi_2^{-1}(u+v) = x+y$ und $\varphi_2^{-1}(\alpha u) = \alpha x$. Damit folgt:

$$\varphi_2^{-1}(u + v) = x + y = \varphi_2^{-1}(u) + \varphi_2^{-1}(v)$$
und
$$\varphi_2^{-1}(\alpha u) = \alpha x = \alpha\varphi_2^{-1}(u)$$

Also ist auch φ_2^{-1} linear.

3. Für die lineare Abbildung $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi_3(x, y) = (x - y, y - x, x)$ sind jeweils die Dimension und eine Basis von $\text{Kern}(\varphi_3)$ sowie $\text{Bild}(\varphi_3)$ zu bestimmen:

   Es ist $(x, y) \in \text{Kern}(\varphi_3) \iff \varphi_3(x, y) = (0, 0, 0)$.
   Mit der gegebenen Abbildung ist also $(x, y) \in \text{Kern}(\varphi_3) \iff x = 0 \wedge x - y = 0$.
   Daraus folgt $\text{Kern}(\varphi_3) = \{(0, 0)\}$, also hat der Kern die Dimension 0, da er nur das Nullelement aus $\mathbb{R}^2$ beinhaltet.
   Damit wissen wir nach dem Kern-Bild-Satz schon, dass die Dimension von $\text{Bild}(\varphi_3)$ 2 ist.

   Es gilt $(a, b, c) \in \text{Bild}(\varphi_3) \iff b = -a$, da $y - x = -(x - y)$.
   Also ist $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ eine Basis von $\text{Bild}(\varphi_3)$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegegen sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie das euklidische Produkt $\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ mit $u, v \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass $\langle A^\top y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ gilt.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\langle A^\top y, x\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot y, x \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n a_{i2} \cdot y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{in} \cdot y_i \end{pmatrix}, x \right\rangle \\
&= x_1 \cdot \sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot y_i + \ldots + x_n \cdot \sum_{i=1}^n a_{in} \cdot y_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left(x_i \cdot \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot y_j \right) \\
\langle y, Ax\rangle &= \left\langle y, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot x \right\rangle \\
&= \left\langle y, \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{i2} \cdot x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{in} \cdot x_i \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= y_1 \cdot \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot x_i + y_2 \cdot \sum_{i=1}^n a_{2i} \cdot x_i + \ldots + y_n \cdot \sum_{i=1}^n a_{ni} \cdot x_i \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_1 \cdot a_{1i} + y_2 \cdot a_{2i} + \ldots + y_n \cdot a_{ni}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n y_i a_{ji} \right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktion $g(x) = x^2$ auf $[0, 2\pi]$.

Lösung: Wir haben

$$
a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} [\frac{1}{3} t^3]_0^{2\pi} = \frac{1}{3\pi} (2\pi)^3 = \frac{8}{3} \pi^2.
$$

Mit partieller Integration berechnen wir

$$\int_0^{2\pi} t^2 \cos(kt)\ \mathrm{d}t = [t^2 \frac{1}{k} \sin(kt)]_0^{2\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{2\pi} t \sin(kt)\ \mathrm{d}t$$

$$= \quad 0 - \frac{2}{k} \left([-t \frac{1}{k} \cos(kt)]_0^{2\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos(kt)\ \mathrm{d}t \right)$$

$$= \quad -\frac{2}{k} \left(-\frac{2\pi}{k} \right) = \frac{4\pi}{k^2}.$$

Analog

$$\int_0^{2\pi} t^2 \sin(kt)\ \mathrm{d}t = [-t^2 \frac{1}{k} \cos(kt)]_0^{2\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{2\pi} t \cos(kt)\ \mathrm{d}t$$

$$= \quad -\frac{(2\pi)^2}{k} + \frac{2}{k} \left([t \frac{1}{k} \sin(kt)]_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin(kt)\ \mathrm{d}t \right)$$

$$= \quad -\frac{4\pi^2}{k}.$$

Damit ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{4}{k^2}, \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \sin(kt)\ \mathrm{d}t = -\frac{4\pi}{k}, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

Aufgabe 8 (4+4 Punkte)

Gegeben sei V der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \mathrm{Spur}(B^\top A)$ (dabei sind $A, B \in V$) , und (siehe Aufgabe 5) $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

- Zeigen Sie, dass $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen Prä-Hilbert-Raum bildet.
- Bestimmen Sie für $n = 2$ eine Orthonormalbasis von V.

Lösung: Beweis:

a)

- zu zeigen: $\langle A, A\rangle > 0$
  Sei $A = (a_{ij})$.

$$\begin{aligned}\langle A, A\rangle &= \text{ Spur } (A^\top A)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ji})^2\right)\\ &> 0\end{aligned}$$

  falls $A \neq 0$.

- zu zeigen: $\langle A, A\rangle = 0 \Longleftrightarrow A = 0$
  Wie im vorherigen Teil zu sehen ist $\langle A, A\rangle$ nur dann gleich Null, wenn A die Nullmatrix ist.

- zu zeigen: $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$
  Anmerkung: Eine quadratische Matrix hat immer dieselbe Spur wie ihre Transponierte.

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \text{ Spur } (B^\top A)\\ &= \text{ Spur } ((B^\top A)^\top)\\ &= \text{ Spur } (A^\top B)\\ &= \langle B, A\rangle\end{aligned}$$

- zu zeigen: $\langle A, \lambda B\rangle = \lambda\langle A, B\rangle$

$$\begin{aligned}\langle A, \lambda B\rangle &= \text{ Spur } ((\lambda B)^\top A)\\ &= \text{ Spur } (\lambda B^\top A)\\ &= \lambda \text{ Spur } (B^\top A)\\ &= \lambda\langle A, B\rangle\end{aligned}$$

- zu zeigen: $\langle A, B + C\rangle = \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$

$$\begin{aligned}\langle A, B + C\rangle &= \text{ Spur } ((B + C)^\top A)\\ &= \text{ Spur } ((B^\top + C^\top)A)\\ &= \text{ Spur } (B^\top A + C^\top A)\\ &= \text{ Spur } (B^\top A) + \text{ Spur } (C^\top A)\\ &= \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle\end{aligned}$$

Da V der Vektorraum der $n\times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ versehen mit einem Skalarprodukt ist, ist V ein Prä-Hilbert-Raum. $\square$

b) Zu bestimmen ist für $n = 2$ eine Orthonormalbasis von V.

Lösung: För den Fall $n = 2$ ist die kanonische Basis von V gegeben durch die 4 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies bleibt noch nachzurechnen:

- Orthogonalität

$$\begin{aligned}
\langle A, B\rangle &= \text{ Spur } B^\top A = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
\langle A, C\rangle &= \text{ Spur } C^\top A = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
\langle A, D\rangle &= \text{ Spur } D^\top A = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
\langle B, C\rangle &= \text{ Spur } C^\top B = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
\langle B, D\rangle &= \text{ Spur } D^\top B = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
\langle C, D\rangle &= \text{ Spur } D^\top C = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

  Somit sind alle Matrizen orthogonal zueinander.

- Orthonormalität

$$\begin{aligned}
\langle A, A\rangle &= \text{ Spur } A^\top A = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle B, B\rangle &= \text{ Spur } B^\top B = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle C, C\rangle &= \text{ Spur } C^\top C = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle D, D\rangle &= \text{ Spur } D^\top D = \text{ Spur } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1
\end{aligned}$$

Da alle Matrizen orthogonal zueinander sind und ihr Betrag gleich Eins ist, bilden sie eine Orthonormalbasis. □

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Multiple Choice: In dieser Aufgabe werden 5 Aussagen gestellt, die entweder richtig oder falsch sind. Sie erhalten für die korrekte Feststellung, ob eine Aussage richtig oder falsch ist, jeweils einen Punkt und jeweils einen zusätzlichen Punkt, falls Sie ihre Entscheidung korrekt begründen können.

1. Die Menge der symmetrischen Matrizen ist eine multiplikative Untergruppe der $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.
2. Beschreibt man eine beliebige Funktion f mittels einer Fourierreihendarstellung, dann wird f besser approximiert, je mehr Fourierkoeffizienten in der Fourierreihe verwendet werden.
3. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.
4. Sind die Eigenwerte einer Matrix nicht alle paarweise verschieden, dann ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

Lösung:

1. *Falsch.* Ein einfaches Gegenbeispiel reicht hier aus:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$
die ersten zwei Matrizen sind offensichtlich symmetrisch, das Matrizenprodukt jedoch nicht mehr, deshalb ist hier die Abgeschlossenheit der Untergruppe verletzt.
2. Die Aussage, die hier gemacht wird kann nur mit Hilfe einer zusätzlichen Annahme eindeutig beantwortet werden. Ist die Funktion f stetig differenzierbar in C^∞, dann kann die Aussage als *richtig* beantwortet werden. Dann kann man aussagen, dass je mehr Koeffizienten verwendet werden, die Approximation durch die Fourierreihe besser wird. Falls diese zusätzliche Annahme nicht gemacht wird, dann kann die Antwort auch *falsch* sein, d.h. die Approximation kann sich sogar kurzfristig leicht verschlechtern.
3. *Richtig:* Es existiert für ein beliebiges Element $a \in \mathbb{Z}^*$ im Allgemeinen kein multiplikatives Inverses a^{-1}.
4. *Falsch:* Es gibt Matrizen, die zwar keine paarweise verschiedenen Eigenwerte besitzen, aber dennoch diagonalisierbar sind. Ein Beispiel hierzu ist die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$