Mathematik für Informatiker II

Universität des Saarlandes — Matthias Hein
Sommersemester 2011 — Christoph Eisinger

Hausübungsblatt 13

Abgabe: Freitag, 15. Juli 2011, 10:10 Uhr

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

a) Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ein Polynom. Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$ mit Eigenvektor v.

b) Zeigen Sie: Ist $Q \in O(n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von Q, so gilt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 2 (3+4=7 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix P mit $A = PDP^{-1}$.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des K^n. Zeigen Sie: Gilt $Av_i = Bv_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, so ist $A = B$.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie, dass dann für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i v_i^T.$$