Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 13

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

a) Da v ein Eigenvektor von A^i zum Eigenwert λ^i ist, gilt

$$p(A)v = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i A^i\right) v = \sum_{i=0}^{m} a_i (A^i v) = \sum_{i=0}^{m} a_i (\lambda^i v) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i\right) v = p(\lambda)v.$$

Daraus folgt direkt die Aussage.

b) Für orthogonale Matrizen gilt, das $|Qu| = |u|$ für jeden Vektor U. Daher gilt

$$|v| = |Qv| = |\lambda v| = |\lambda||v|.$$

Daraus folgt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 2 (3+4=7 Punkte)

a) Wir berechnen

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = (\lambda - 7)(\lambda + 2).$$

d.h., die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_1 = -2$.

1. Eigenraum zu $\lambda_1 = 7$: Wir lösen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Die beiden Zeilen der Matrix sind linear abhängig und führen zur Bedingung $x = y$. Der Eigenraum ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Eigenraum zu $\lambda_2 = -2$: Wir lösen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Die beiden Zeilen der Matrix sind linear abhängig und führen zur Bedingung $y = -\frac{5}{4}x$. Der Eigenraum ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ -\frac{5}{4}s \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Durch Entwicklung nach der letzten Zeile berechnen wir

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3-\lambda & 3 \end{vmatrix} - (2+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -3(-3+2(3+\lambda)) - (2+\lambda)((2-\lambda)(-3-\lambda)+5) \\
&= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = (\lambda+1)^2 \\
\Leftrightarrow & \ \lambda = -1.
\end{aligned}$$

Um den zugehörigen Eigenraum zu bestimmen, lösen wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = x \wedge z = -x.$$

Der Eigenraum ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \\ -s \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte und -vektoren von A. Dazu berechnen wir durch Entwicklung nach der letzten Spalte

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= 3(2+(-1-\lambda)) + (1-\lambda)((2-\lambda)(-1-\lambda)-3) \\
&= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) \\
\Leftrightarrow &\quad \lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 2 \wedge \lambda_3 = -1.
\end{aligned}$$

1. Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$: Wir lösen die Gleichung

   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 2y \wedge z = -\frac{5}{3}y.$$

   Setzen wir $y = 3$, so erhalten wir den Eigenvektor $v_1 = (6,3,-5)^T$ als Basisvektor des Eigenraums.

2. Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$: Wir lösen die Gleichung

   $$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 3y \wedge z = -y.$$

   Setzen wir $y = 1$, so erhalten wir den Eigenvektor $v_2 = (3,1,-1)^T$ als Basisvektor des Eigenraums.

3. Eigenraum zu $\lambda_3 = -1$: Wir lösen die Gleichung

   $$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge z = -y.$$

   Setzen wir $y = 1$, so erhalten wir den Eigenvektor $v_1 = (0,1,-1)^T$ als Basisvektor des Eigenraums.

Die Matrix P erhalten wir nun, indem wir die Eigenvektoren v_1, v_2 und v_3 als ihre Spalten wählen, also

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonale von D besteht aus den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

a) Es seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, e_j der j-te kanonische Einheitsvektor. Da $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des K^n ist, existiert eine Darstellung $e_j = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} &= Ae_j = A\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i(Av_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(Bv_i) = B\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = Be_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber auch, dass $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da dies auch für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt, folgt $A = B$.

b) Wir benutzen Teil a): Da $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis ist, gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k v_i v_i^T\right) v_j &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^k v_i (v_i^T v_j) = \sum_{i=1, i\neq j}^n \lambda_i^k v_i \underbrace{(v_i^T v_j)}_{=0} + \lambda_j^k v_j \underbrace{(v_j^T v_j)}_{=1} \\ &= \lambda_j^k v_j = A^k v_j. \end{aligned}$$

Mit Teil a) folgt dann die Aussage.