Mathematik für Informatiker II

Universität des Saarlandes — Matthias Hein
Sommersemester 2011 — Christoph Eisinger

Hausübungsblatt 12

Abgabe: Freitag, 8. Juli 2011, 10:10 Uhr

Aufgabe 1 (6+6=12 Punkte)

a) Für ein $u \in C[0, 2\pi]$ sei f_u ihre Fourierreihe mit

$$f_u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right),$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t, \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t, \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $u \mapsto f_u$ linear ist.

b) Entwickeln Sie die Funktion $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; x \mapsto e^x$ in ihre Fourierreihe.

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

Gegeben seien $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{\sqrt{42}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass Q eine orthogonale Matrix ist.

b) Lösen Sie die Gleichung $Qx = y$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3 (6+2=8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $O(n)$ und $SO(n)$ Untergruppen von $GL(n, \mathbb{R})$ sind.

b) Zeigen Sie, dass $\{Q \in O(n) | \det Q = -1\}$ keine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ ist.