Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 12

Aufgabe 1 (6+6=12 Punkte)

a) Für $u, v \in C[0, 2\pi], \lambda \in \mathbb{R}$ ist zu zeigen, dass

$$f_{\lambda u+v}(x) = \lambda f_u(x) + f_v(x).$$

Dies lässt sich entweder mit der in der Aufgabenstellung angegebenen Formel nachrechnen. Oder man nutzt alternativ dazu aus, dass die Fourierreihe die Projektion von u auf den Raum $span\{v_k | k = 0, 1, 2, \dots\}$ ist mit

$$\begin{aligned} v_{2k}(x) &= \cos(kx), & (k = 0, 1, \dots), \\ v_{2k-1}(x) &= \sin(kx), & (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f_u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle u, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k(x)$$

und

$$\begin{aligned} f_{\lambda u+v}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \lambda u + v, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda \langle u, v_k \rangle + \langle u, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k(x) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle u, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle v, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k(x) \\ &= \lambda f_u(x) + f_v(x). \end{aligned}$$

b) Wir haben

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^t \; \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} [e^t]_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}.$$

Mit partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^t \cos(kt)\ \mathrm{d}t &= [e^t \cos(kt)]_0^{2\pi} + k \int_0^{2\pi} e^t \sin(kt)\ \mathrm{d}t \\
&= e^{2\pi} - 1 + k \left([e^t \sin(kt)]_0^{2\pi} - k \int_0^{2\pi} e^t \cos(kt)\ \mathrm{d}t \right) \\
&= e^{2\pi} - 1 - k^2 \int_0^{2\pi} e^t \cos(kt)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} e^t \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{e^{2\pi} - 1}{1 + k^2}.$$

Analog

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^t \sin(kt)\ \mathrm{d}t &= [e^t \sin(kt)]_0^{2\pi} - k \int_0^{2\pi} e^t \cos(kt)\ \mathrm{d}t \\
&= -k \left([e^t \cos(kt)]_0^{2\pi} + k \int_0^{2\pi} e^t \sin(kt)\ \mathrm{d}t \right) \\
&= -k(e^{2\pi} - 1) - k^2 \int_0^{2\pi} e^t \sin(kt)\ \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

also

$$\int_0^{2\pi} e^t \sin(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{-k(e^{2\pi} - 1)}{1 + k^2}.$$

Damit ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^t \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + k^2)}, \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^t \sin(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{-k(e^{2\pi} - 1)}{\pi(1 + k^2)}, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

und

$$\begin{aligned} f_u(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) \\ &= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx) - k\sin(kx)}{1+k^2} \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

Gegeben seien $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{\sqrt{42}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Wir zeigen, dass die Spalten von Q

$$q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, q_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{42}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis bilden. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned} q_1^T q_1 &= \frac{1+9+4}{14} = 1 \\ q_1^T q_2 &= \frac{1-3+2}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = 0 \\ q_1^T q_3 &= \frac{-5-3+8}{\sqrt{14}\sqrt{42}} = 0 \\ q_2^T q_2 &= \frac{1+1+1}{3} = 1 \\ q_2^T q_3 &= \frac{-5+1+4}{\sqrt{3}\sqrt{42}} = 0 \\ q_3^T q_3 &= \frac{25+1+16}{42} = 1. \end{aligned}$$

Die Spalten von Q bilden also eine Orthonormalbasis, was bedeutet, dass Q orthogonal ist.

b) Da Q orthogonal ist, gilt $Q^{-1} = Q^T$. Es ist also

$$\begin{aligned} x &= Q^{-1}y = Q^T y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{42}} & \frac{4}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3+12+4}{\sqrt{14}} \\ \frac{3-4+2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-15-4+8}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-11}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (6+2=8 Punkte)

a) Es ist $I_n^{-1} = I_n^T (= I_n)$ und $\det I_n = 1$. Daraus folgt, dass $I_n \in SO(n) \subseteq O(n)$, d.h. die beiden Mengen sind nicht leer. Seien nun $A, B \in O(n)$ d.h. es gilt $A^{-1} = A^T$ und $B^{-1} = B^T$. Dann gilt $(AB^{-1})^{-1} = (B^{-1})^{-1}A^{-1} = BA^T = (B^T)^T A^T = (AB^T)^T = (AB^{-1})^T$, d.h. es ist $AB^{-1} \in O(n)$. Also ist $O(n)$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$.
Seien $A, B \in SO(n)$, d.h. $A, B \in O(n)$ mit $\det A = \det B = 1$. Da $A, B \in O(n)$, gilt analog zu oben $AB^{-1} \in O(n)$. Zusätzlich gilt auch $\det(AB^{-1}) = (\det A)\cdot(\det B)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$, also $AB^{-1} \in SO(n)$. Daher ist $SO(n)$ ebenfalls eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$.

b) Es ist $\det I_n = 1 \neq -1$, daher ist $I_n \notin \{Q \in O(n) | \det Q = -1\}$. Da jede Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ deren neutrales Element, also I_n, enthalten muss, ist $\{Q \in O(n) | \det Q = -1\}$ keine Untergruppe.