Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 11

Aufgabe 1

Wir bezeichnen $U := \{v \in K^n | Av = \lambda v\}$. Es gilt $A \cdot 0 = \lambda \cdot 0$, und damit $0 \in U$. Seien nun $u, v \in U$, $\alpha \in K$. Dann gilt $A(\alpha u + v) = \alpha Au + Av = \alpha(\lambda u) + \lambda v = \lambda(\alpha u + v)$. Damit ist $\alpha u + v \in U$. U ist also ein Untervektorraum.

Aufgabe 2

a) Wir berechnen

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

d.h., der einzige Eigenwert ist $\lambda = 3$. Der zugehörige Eigenraum besteht aus den Vektoren $(x, y)^T$ mit

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Die beiden Zeilen der Matrix sind linear abhängig und führen zu der Bedingung $x = -y$. Der Eigenraum zum Eigenwert 3 ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Wir berechnen

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) + 15 = \lambda^2 - \lambda + 13.$$

Da die Gleichung $\lambda^2 - \lambda + 13 = 0$ in $\mathbb{R}$ nicht lösbar ist, besitzt die Matrix keine reellen Eigenwerte und Eigenvektoren.

c) Durch Entwicklung nach der ersten Zeile berechnen wir

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda((1-\lambda)(-\lambda)) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) \\
\Leftrightarrow\ & \lambda_{1/2} = \pm 1.
\end{aligned}
$$

1. Eigenraum zu $\lambda = 1$: Wir lösen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = z$$

Der Eigenraum ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Eigenraum zu $\lambda = -1$: Wir lösen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = -z \wedge y = 0.$$

Der Eigenraum ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$