Mathematik für Informatiker II

Universität des Saarlandes — Matthias Hein

Sommersemester 2011 — Christoph Eisinger

Hausübungsblatt 11

Abgabe: Freitag, 1. Juli 2011, 10:10 Uhr

Aufgabe 1 (5+3+4=12 Punkte)

Gegeben sei

$$U := span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Benutzen Sie das Verfahren von Gram-Schmidt, um eine Ortho*gonal*basis B_1 von U zu konstruieren.

b) Bestimmen Sie eine Ortho*normal*basis B_2 von U.

c) Stellen Sie den Vektor $u = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren von B_1 bzw. B_2 dar.

Aufgabe 2 (2+3+5+2=12 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler Prä-Hilbert-Raum und sei W ein Unterraum von V. Zeigen Sie:

a) $W^\perp$ ist ein Unterraum von V.

b) $W \cap W^\perp = \{0\}$.

c) $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

d) Ist U ein Unterraum von W, so gilt $W^\perp \subseteq U^\perp$.

Aufgabe 3 (4+3+3=10 Punkte)

Es sei $W = \Pi_3$ der Raum der Polynome vom Grad ≤ 3 versehen mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \sum_{i=0}^{3} a_i x^i, \sum_{i=0}^{3} b_i x^i \right\rangle := \sum_{i=0}^{3} a_i b_i.$$

sowie die Vektoren

$$v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2.$$

Außerdem seien $V = span\{v_1, v_2, v_3\}$ und $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 3$.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\{v_1, v_2, v_3\}$ um eine Orthonormalbasis von V handelt.

b) Bestimmen Sie die beste Approximation g von f in V.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen f und g.