# Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

# Musterlösungen zum Hausübungsblatt 11

## Aufgabe 1 (5+3+4=12 Punkte)

a) Die drei Basisvektoren von $U$ sind

$$u_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung des Verfahrens von Gram-Schmidt liefert

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\
v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1-3+1}{1+1+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \\
v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{-6+1-1}{1+1+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2-2-5}{4+4+1} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Die Vektoren der Orthonormalbasis ergeben sich aus den Vektoren der Orthogonalbasis durch Division durch die jeweilige Norm:

$$\tilde{v}_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{v}_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} u &= \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 + \frac{\langle u, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} v_3 \\ &= \frac{2-5-3}{3} v_1 + \frac{10-6+5}{9} v_2 + \frac{-8-5-9-20}{42} v_3 \\ &= -2v_1 + v_2 - v_3 \\ &= -2\sqrt{3}\tilde{v}_1 + 3\tilde{v}_2 - \sqrt{42}\tilde{v}_3. \end{aligned}$$

## Aufgabe 2 (2+3+5+2=12 Punkte)

a) Es ist $\langle 0, w \rangle = 0$ für alle $w \in W$, und damit $0 \in W^\perp$. Seien $u, v \in W^\perp, \lambda \in K$. Sei $w \in W$ beliebig. Dann gilt $\langle u, w \rangle = 0$ und $\langle v, w \rangle = 0$, also auch $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0$ sowie $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle = 0$. Damit sind auch $u+v, \lambda u \in W^\perp$. Also ist $W^\perp$ ein Unterraum von $V$.

b) Sei $v \in W \cap W^\perp$. Da $v \in W^\perp$, gilt $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in W$, also auch $\langle v, v \rangle = 0$, da $v \in W$. Wegen der positiven Definitheit des Skalarproduktes ($\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$) gilt dann aber $v = 0$. Also gilt $W \cap W^\perp = \{0\}$.

c) Seien $B_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von $W$ und $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eine ONB von $W^\perp$. Wir zeigen nun, dass die Menge $B_3 = \{w_1, \ldots, w_m, u_1, \ldots, u_n\}$ eine ONB von $V$ ist.

1. Für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt offensichtlich, dass $w_i \in W$ und $u_j \in W^\perp$, also $\langle w_i, u_j \rangle = 0$. Deshalb ist $B_3$ eine orthogonale Menge und damit linear unabhängig.
2. Da $B_3 \subseteq V$ und $V$ ein Vektorraum ist, gilt auch $\operatorname{span} B_3 \subseteq V$. Umgekehrt lässt sich jedes $v \in V$ darstellen als $v = w + u$ mit $w \in W$ und $u \in W^\perp$. Da $B_1$ bzw. $B_2$ Basen von $W$ bzw. $W^\perp$ sind, existieren Darstellungen $w = \sum_{i=1}^m a_i w_i$ bzw. $u = \sum_{j=1}^n b_j u_j$. Also gilt $v = w + u = \sum_{i=1}^m a_i w_i + \sum_{j=1}^n b_j u_j \in \operatorname{span} B_3$. Also gilt $V \subseteq \operatorname{span} B_3$ und damit $V = \operatorname{span} B_3$.

Das heisst $\dim V = |B_3| = m + n = |B_1| + |B_2| = \dim W + \dim W^\perp$.

d) Sei $v \in W^\perp$, d.h. $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $w \in W$, damit aber auch $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $w \in U$, da $U \subseteq W$. D.h. $v \in U^\perp$, und damit $W^\perp \subseteq U^\perp$.

## Aufgabe 3 (4+3+3=10 Punkte)

a) Es ist

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2\rangle &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0\\
\langle v_1, v_3\rangle &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0\\
\langle v_2, v_3\rangle &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0\\
\langle v_1, v_1\rangle &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1\\
\langle v_2, v_2\rangle &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1\\
\langle v_3, v_3\rangle &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1
\end{aligned}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ ist also eine Orthonormalbasis.

b) Die beste Approximation von $f$ in $V$ ist gerade die Projektion von $f$ auf $V$, es ist also, da $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis von $V$ ist,

$$g = \operatorname*{proj}_V f = \sum_{i=1}^{3} \langle f, v_i\rangle v_i = -2x^2 + 5x + 3.$$

c) Sei $\theta$ der Winkel zwischen $f$ und $g$. Dann gilt

$$\cos\theta = \frac{\langle f, g\rangle}{\sqrt{\langle f, f\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle}} = \frac{9 + 25 + 4}{\sqrt{9 + 25 + 4 + 9}\sqrt{9 + 25 + 4}} = \sqrt{\frac{38}{47}} = 0,899.$$

Daraus ergibt sich $\theta = 25,95°$.