Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 10

Aufgabe 1

Eine Drehungsmatrix hat die Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

1. Im Intervall $[0, 360°)$ gibt es zwei Winkel α mit $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, nämlich $135°$ und $225°$. Es ist $\sin 135° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\sin 225° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Daher ist A die Drehungsmatrix zum Winkel $\alpha = 135°$.
2. B ist keine Drehungsmatrix, da bei einer Drehungsmatrix die Einträge links oben und rechts unten identisch sind.
3. C ist keine Drehungsmatrix, da es kein α gibt mit $\cos\alpha = 2$.
4. Im Intervall $[0, 360°)$ gibt es genau ein α mit $\cos\alpha = -1$, nämlich $180°$. Es gilt auch $\sin 180° = 0$, daher ist D die Drehungsmatrix zum Winkel $\alpha = 180°$.

Aufgabe 2

1. Die Symmetrie ist erfüllt: Es gilt $\|y - x\|_1 = \| - (x - y)\|_1 = | - 1|\|x - y\|_1 = \|x - y\|_1$ und damit
$$\alpha(y, x) = \frac{1}{4}\left(\|y + x\|_1^2 - \|y - x\|_1^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|_1^2 - \|x - y\|_1^2\right) = \alpha(x, y).$$
2. Die Additivität ist verletzt. Als Gegenbeispiel wählen wir
$$\begin{aligned}
\alpha(e_1 + e_2, e_1) &= \frac{1}{4}\left(\|2e_1 + e_2\|_1^2 - \|e_2\|_1^2\right) = \frac{1}{4}(9 - 1) = 2 \\
\alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_1) &= \frac{1}{4}\left(\|2e_1\|_1^2 - \|0\|_1^2\right) + \frac{1}{4}\left(\|e_2 + e_1\|_1^2 - \|e_2 - e_1\|_1^2\right) \\
&= \frac{1}{4}(4 - 0) + \frac{1}{4}(4 - 4) = 1 - 0 = 1 \\
&\neq \alpha(e_1 + e_2, e_1),
\end{aligned}$$

wobei $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ und $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ kanonische Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ sind.

3. Die Homogenität ist ebenfalls verletzt. Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned}
\alpha(2e_1, e_1 - e_2) &= \frac{1}{4}\left(\|3e_1 - e_2\|_1^2 - \|e_1 + e_2\|_1^2\right) = \frac{1}{4}(16 - 4) = 3 \\
2\alpha(e_1, e_1 - e_2) &= \frac{1}{2}\left(\|2e_1 - e_2\|_1^2 - \|e_2\|_1^2\right) = \frac{1}{2}(9 - 1) = 4 \\
&\neq \alpha(2e_1, e_1 - e_2).
\end{aligned}$$

4. Die Nichtnegativität ist erfüllt, denn es ist

$$\alpha(x, x) = \frac{1}{4}\left(\|2x\|_1^2 - \|x - x\|_1^2\right) = \frac{1}{4}\left(2^2\|x\|_1^2 - 0\right) = \|x\|_1^2 \geq 0.$$

5. Die positive Definitheit ist ebenfalls erfüllt, denn

$$\alpha(x, x) = 0 \Rightarrow \|x\|_1^2 = 0 \Rightarrow \|x\|_1 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Die Polarisationgleichung besagt, dass für jede von einem Skalarprodukt induzierte Norm die analog zu α definierte Abbildung ein Skalarprodukt ist. Die Norm $\|\cdot\|_1$ ist allerdings nicht von einem Skalarprodukt induziert, daher braucht die Polarisationgleichung auch nicht zu gelten.