**Mathematik für Informatiker II**

Universität des Saarlandes — Matthias Hein
Sommersemester 2011 — Christoph Eisinger

---

# Hausübungsblatt 10

**Abgabe:** Freitag, 24. Juni 2011, 10:10 Uhr

## Aufgabe 1 (3+6=9 Punkte)

Auf $\mathbb{R}^3$ definiert man das *Vektor*- oder *Kreuzprodukt* als

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: $a \times b$ ist orthogonal sowohl zu $a$ als auch zu $b$.

b) Zeigen Sie: Sind $a, b \neq 0$, so gilt: $a \times b = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$ (d.h. $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : b = \lambda a$).

## Aufgabe 2 (5+2+2+2=11 Punkte)

Auf dem Vektorraum $V = C[0,1]$ der auf $[0,1]$ stetigen reellwertigen Funktionen definieren wir die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}; \quad \langle f, g \rangle \mapsto \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Weiterhin seien $\|f\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm sowie $d$ die von der Norm induzierte Metrik.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei der Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um ein Skalarprodukt handelt.

b) Berechnen Sie $\langle e^x - 1, x + 1 \rangle$.

c) Berechnen Sie $\| \sin x \|$.

d) Berechnen Sie $d(2x^2 + 3x - 1, x^2 - x + 2)$.

## Aufgabe 3 (4+4+4=12 Punkte)

Gegeben seien die Normen $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ und $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|$ auf $\mathbb{R}^n$.

a) Skizzieren Sie für beide Normen die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| = 1\}$.

b) Zeigen Sie: Ist eine Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert, so erfüllt sie das Parallelogrammgesetz, d.h. es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

c) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ für jedes $n \geq 2$ nicht von einem Skalarprodukt induziert sind.