Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 10

Aufgabe 1 (3+6=9 Punkte)

a) Um Orthogonalität zu überprüfen, berechnen wir das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
(a \times b) \cdot a &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot a_3 \\
&= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die beiden Vektoren $a \times b$ und a sind also orthogonal. Analog berechnen wir

$$\begin{aligned}
(a \times b) \cdot b &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot b_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot b_3 \\
&= a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$a \times b$ und b sind also ebenfalls orthogonal.

b) "$\Rightarrow$": Da $a \neq 0$, existiert ein $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $a_i \neq 0$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $i = 1$. Wir definieren $\lambda := \frac{b_1}{a_1}$, denn dann gilt $b_1 = \lambda a_1$. Aus $a \times b = 0$ folgt, dass $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, also auch $b_2 = \frac{b_1}{a_1}a_2 = \lambda a_2$. Aus $a \times b = 0$ folgt ebenfalls, dass $a_3b_1 - a_1b_3 = 0$, also auch $b_3 = \frac{b_1}{a_1}a_3 = \lambda a_3$. Daher gilt $b = \lambda a$. Da $b \neq 0$, muss auch $\lambda \neq 0$ gelten.
"$\Leftarrow$": Es ist

$$a \times (\lambda a) = \begin{pmatrix} a_2\lambda a_3 - a_3\lambda a_2 \\ a_3\lambda a_1 - a_1\lambda a_3 \\ a_1\lambda a_2 - a_2\lambda a_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_2a_3 - a_3a_2 \\ a_3a_1 - a_1a_3 \\ a_1a_2 - a_2a_1 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 2 (5+2+2+2=11 Punkte)

a) Seien $f, g \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Symmetrie: Es ist

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)f(x)\ \mathrm{d}x = \langle g, f\rangle.$$

2. Additivität:

$$\begin{aligned}\langle f+g, h\rangle &= \int_0^1 (f(x)+g(x))h(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)h(x)+g(x)h(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)h(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)h(x)\ \mathrm{d}x = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle\end{aligned}$$

3. Homogenität:

$$\langle \lambda f, g\rangle = \int_0^1 \lambda f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \lambda\langle f, g\rangle.$$

4. Nichtnegativität: Da $(f(x))^2 \geq 0$ für $f(x) \in \mathbb{R}$, folgt auch

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 (f(x))^2\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

5. Nichtdegeneriertheit: Da f nach Definition stetig ist, gilt dies auch für f^2, und daher folgt aus $\int_0^1 (f(x))^2\ \mathrm{d}x = 0$, dass $f^2 = 0$, und damit $f = 0$.

b) Es ist

$$\langle e^x - 1, x+1\rangle = \int_0^1 (e^x-1)(x+1)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 xe^x + e^x - x - 1\ \mathrm{d}x$$

Wir berechnen zunächst eine Stammfunktion zu xe^x mit partieller Integration:

$$\int xe^x\ \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\ \mathrm{d}x = xe^x - e^x.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\langle e^x - 1, x+1\rangle &= \left[xe^x - e^x + e^x - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1 = \left[xe^x - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1 \\ &= e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

c) Es ist

$$\|\sin x\| = \sqrt{\langle \sin x, \sin x\rangle} = \sqrt{\int\limits_0^1 \sin^2 x \; \mathrm{d}x}$$

Mit partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \sin^2 x \; \mathrm{d}x &= [-\sin x \cos x]_0^1 + \int\limits_0^1 \cos^2 x \; \mathrm{d}x \\ &= [-\sin x \cos x]_0^1 + \int\limits_0^1 1 - \sin^2 x \; \mathrm{d}x \\ &= [-\sin x \cos x]_0^1 + [x]_0^1 - \int\limits_0^1 \sin^2 x \; \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Auflösen der Gleichung nach $\int\limits_0^1 \sin^2 x \; \mathrm{d}x$ ergibt

$$\int\limits_0^1 \sin^2 x \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left([-\sin x \cos x]_0^1 + [x]_0^1\right) = -\frac{1}{2}\sin 1 \cos 1 + \frac{1}{2}.$$

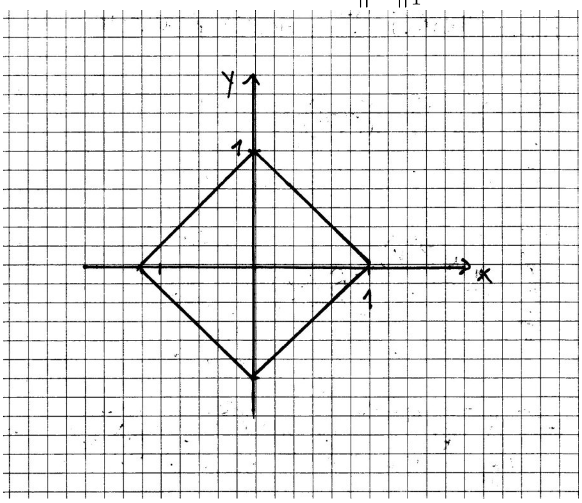
Damit ist $\|\sin x\| = \sqrt{-\frac{1}{2}\sin 1 \cos 1 + \frac{1}{2}}$.

d) Es ist

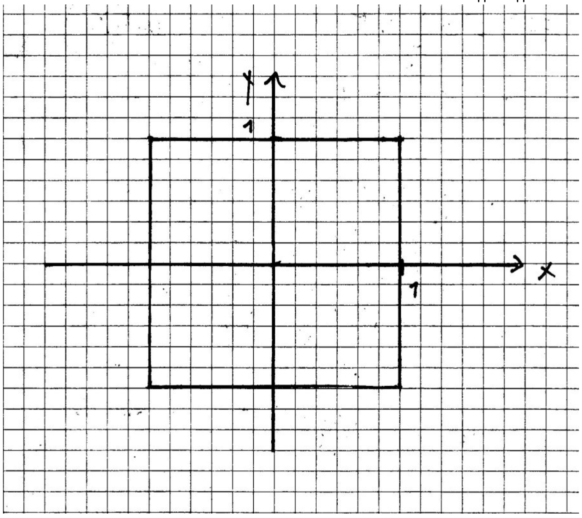
$$
\begin{aligned}
d(2x^2+3x-1, x^2-x+2) &= \|2x^2+3x-1-(x^2-x+2)\| \\
&= \|x^2+4x-3\| = \sqrt{\int_0^1 (x^2+4x-3)^2 \mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\int_0^1 x^4+8x^3+10x^2-24x+9 \ \mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\left[\frac{1}{5}x^5+2x^4+\frac{10}{3}x^3-12x^2+9x\right]_0^1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5}+2+\frac{10}{3}-12+9} = 1,6
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (4+4+4=12 Punkte)

a) Einheitskreis der 1-Norm $\|\cdot\|_1$:



Einheitskreis der Maximumsnorm $\| \cdot \|_\infty$:



b) Wir haben

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \quad \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\
&= \quad \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \quad 2(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

c) Wir zeigen zunächst, dass die beiden Normen das Parallelogrammgesetz für alle $n \geq 2$ nicht erfüllen. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Vektoren $x = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ und $y = e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$. Es ist dann $x + y = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ und $x - y = (1, -1, 0, \ldots, 0)$. Dann gilt

$$\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 4 + 4 = 8 \neq 4 = 2(1+1) = 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2)$$

und

$$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2 \neq 4 = 2(1+1) = 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2)$$

Da die beiden Normen das Parallelogrammgesetz nicht erfüllen, können sie nach Teil b) auch nicht von einem Skalarprodukt induziert sein.