Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 9

Aufgabe 1

a) Die Basisvektoren von U sind

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zunächst eine Basis von $U^\perp$. Es ist $\dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim U = 4 - 2 = 2$, Ziel ist es also, 2 linear unabhängige Vektoren v_1 und v_2 zu finden, die sowohl zu u_1 als auch zu u_2 orthogonal sind. Da die vierte Komponente von u_1 und u_2 jeweils 0 ist, können wir $v_1 = (0,0,0,1)^T$ wählen. Außerdem können wir nur die ersten drei Komponenten von u_1 und u_2 betrachten und das Vektorprodukt des $\mathbb{R}^3$ bilden, um einen Vektor zu erhalten, der zu beiden orthogonal ist. Hinzufügen der vierten Komponente 0 ändert nichts an der Orthogonalität. Wir haben also

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -7 \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen also $v_2 = (0,2,1,0)^T$. Da v_1 und v_2 orthogonal sind, bilden sie bereits eine Orthogonalbasis von $U^\perp$.

b) Die beste Approximation von w in $U^\perp$ ist gerade die Projektion von w auf

$U^\perp$. Es ist

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{proj}_V U^\perp &= \frac{\langle w, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle w, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 \\
&= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/5 \\ 3/5 \\ 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c) Wir wählen $v = \operatorname{proj}_V U^\perp = (0, 6/5, 3/5, 8)^T$ und $u = w - v = (3, -1, 5, 8)^T - (0, 6/5, 3/5, 8)^T = (3, -11/5, 22/5, 0)$.

Aufgabe 2

Die Anwendung des Verfahrens von Gram-Schmidt liefert

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1; \\
v_2 &= x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = x - \frac{\int_0^1 x \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 1 \, \mathrm{d}x} = x - \frac{[\frac{1}{2}x^2]_0^1}{[x]_0^1} = x - \frac{1}{2}; \\
v_2 &= x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle x^2, x - \frac{1}{2}\rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \\
&= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x}{1} - \frac{\int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2 \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, \mathrm{d}x} \cdot (x - \frac{1}{2}) \\
&= x^2 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \frac{[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3]_0^1}{[\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2})^3]_0^1} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \\
&= x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$